

測地線

まっすぐな線

プリント B10

【用語を2つ準備】

多様体：多様体は曲面（2次元の場合）の拡張概念です。

「図形」「空間」のこと、

開集合：「 p を含む M の**開集合**」は

中心 p の開円板 $\{ x \in M \mid d(p, x) < \varepsilon \}$ のこと、

と 思って聞いてください。

測地線の定義 1 .

[暫定]

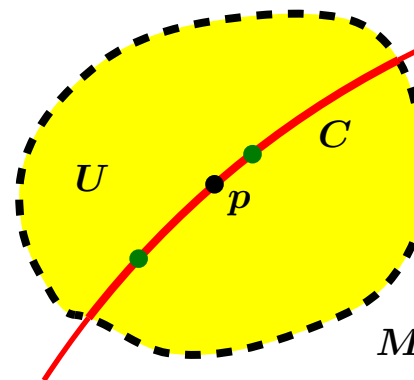
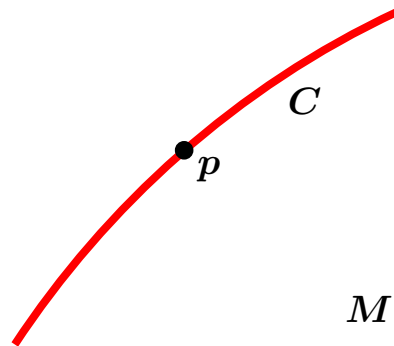
計量の定められた 多様体 M 内の 曲線 C が測地線であるとは,

C 上の任意の点 p において,

p を含む M の 開集合 U が存在して,

$U \cap C$ の任意の 2 点 p_1, p_2 を結ぶ最短線が C の一部になる

こと.



測地線の定義 1 .

[暫定]

計量の定められた 多様体 M 内の 曲線 C が測地線であるとは,

C 上の任意の点 p において,

p を含む M の 開集合 U が存在して,

$U \cap C$ の任意の 2 点 p_1, p_2 を結ぶ最短線が C の一部になる

こと.

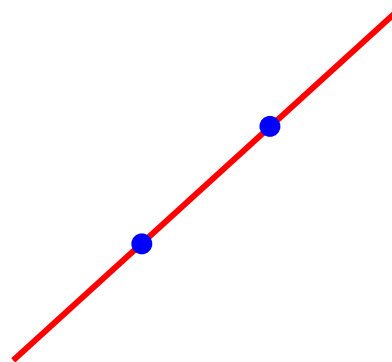
局所的に 最短線 であること

“引っ張ってできる 長さが極小の線” であること

M 全体を見たときには, もっと短い線があっても構わない.

極小 vs 最小

例 1. $\mathbb{R}^n$ 内の 直線



例 1. $\mathbb{R}^n$ 内の 直線

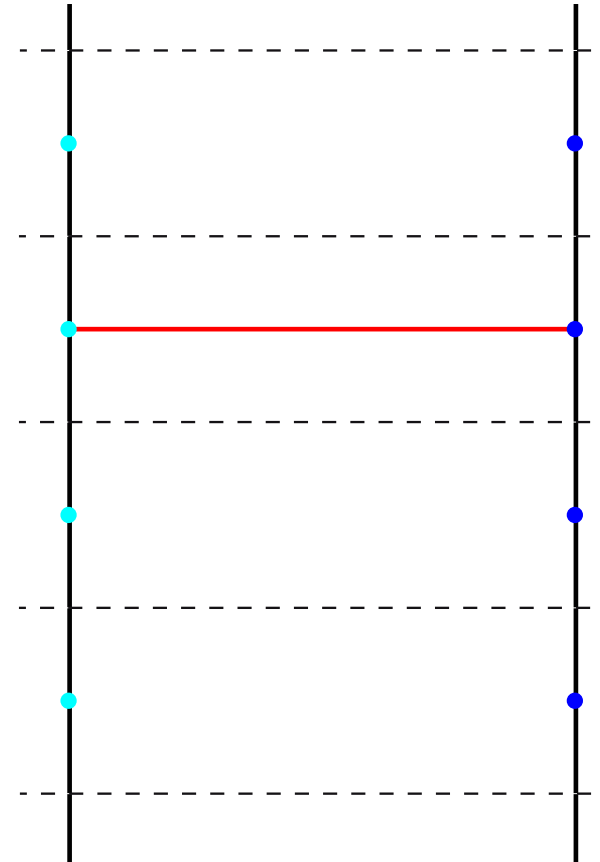
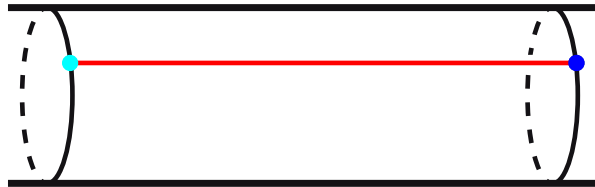


例 2. 球面 S^n 内の 大円 (原点を通る平面との交わり)



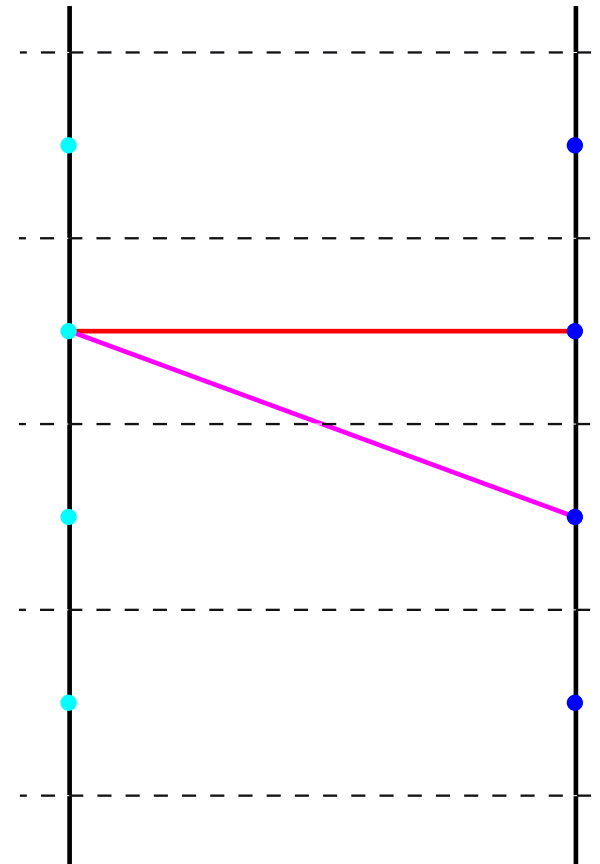
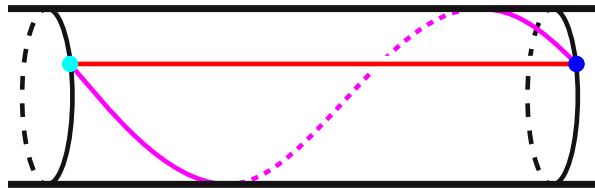
考察. 曲面の上で測地線を考えると, 不思議なことが生じる.

例. 円筒



考察. 曲面の上で測地線を考えると, 不思議なことが生じる.

例. 円筒

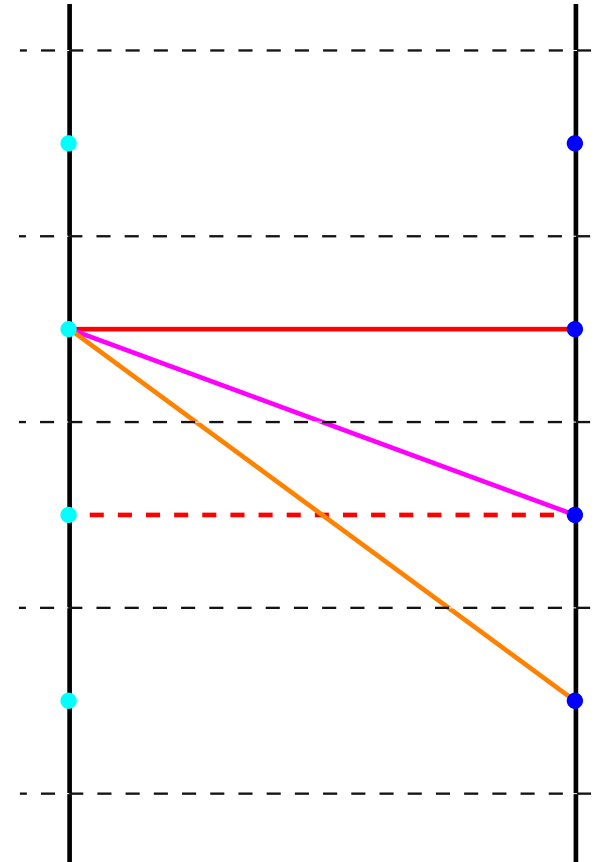
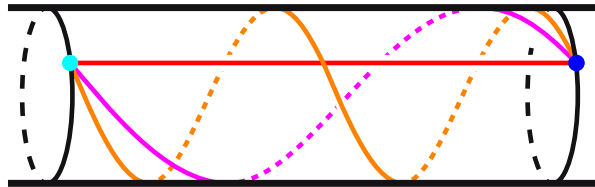


複数ある

注: 端点は動かさない

考察. 曲面の上で測地線を考えると, 不思議なことが生じる.

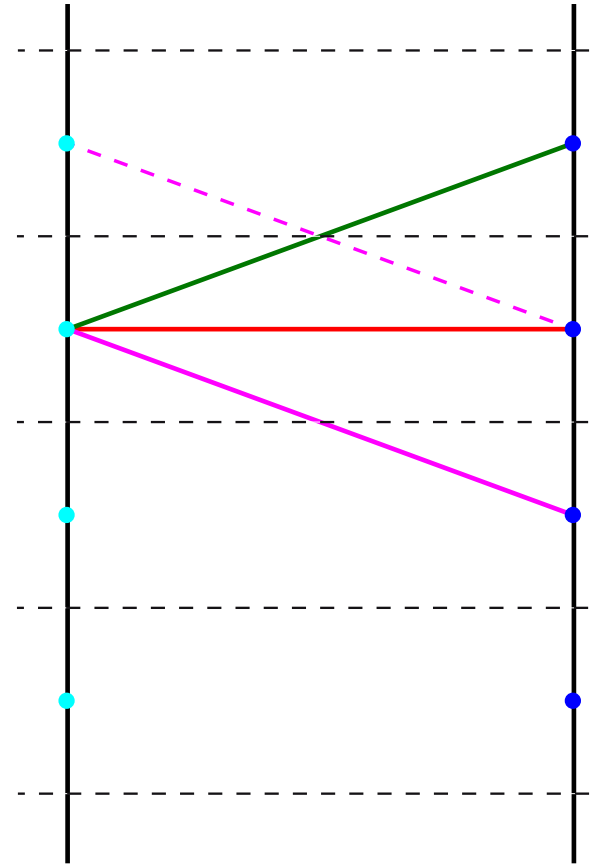
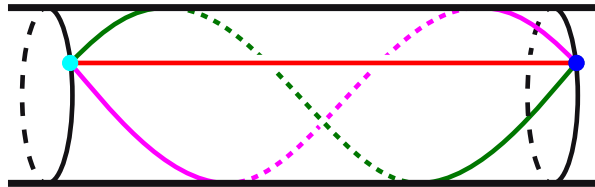
例. 円筒



まだある

考察. 曲面の上で測地線を考えると, 不思議なことが生じる.

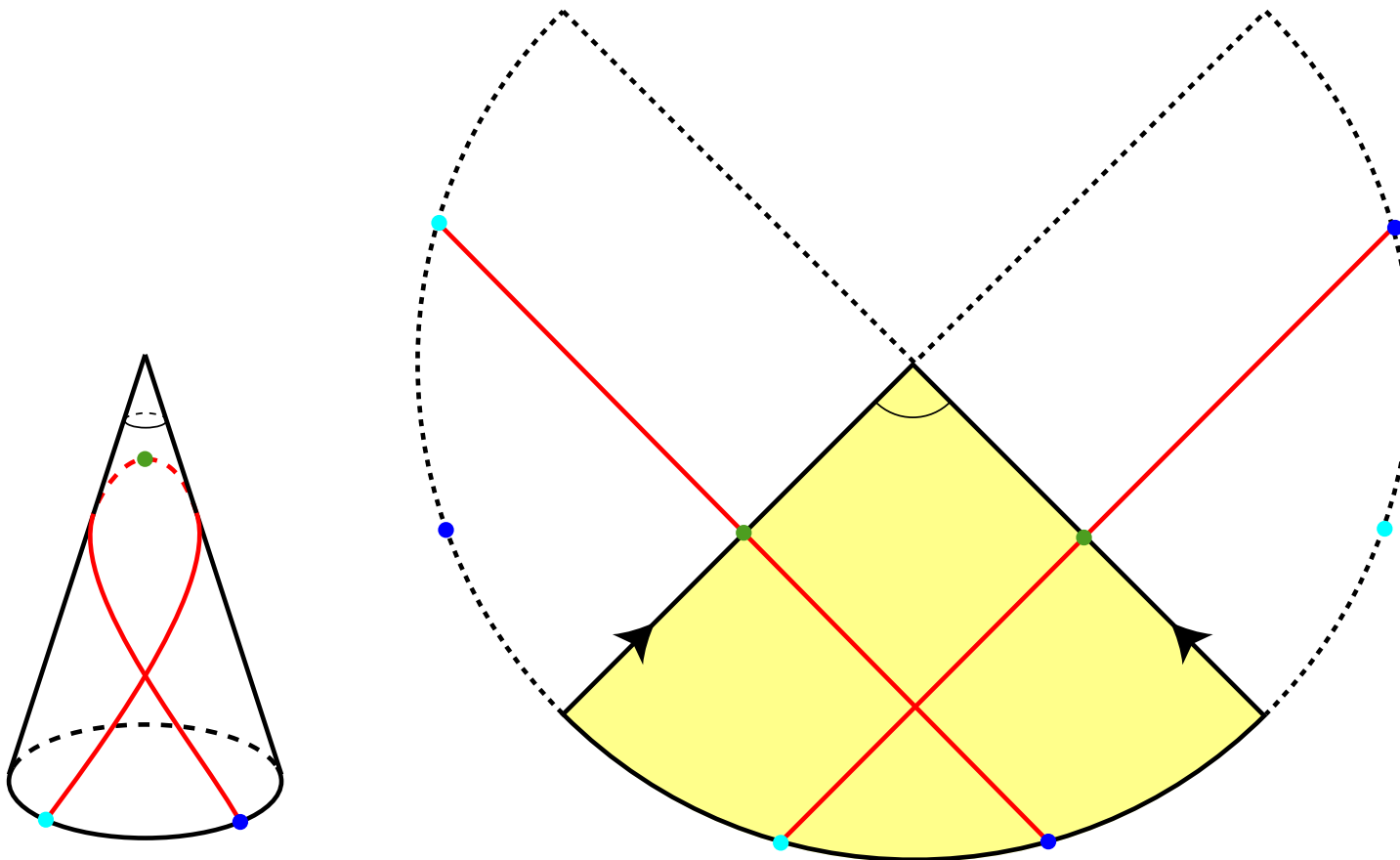
例. 円筒



無限にある

考察. 曲面の上で測地線を考えると, 不思議なことが生じる.

例. 円錐面



自己交点がある

定義の修正へ 測地線の本質は

“引っ張ってできる 長さが極小 の線”であること

[現実] 引っ張った結果 交点をもつ場合もある

→ 定義が目的に 合わない.

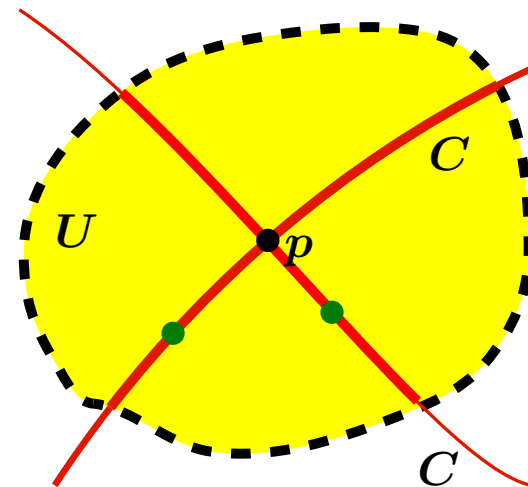
交点があると定義に反する：右図

定義（再）： C 上の任意の点 p において,

p を含む M の開集合 U が存在して,

$U \cap C$ の任意の2点 p_1, p_2 を結ぶ

最短線が C の一部になる



→ 定義の方を修正する

アイデア： 数学でいう 曲線は「動点の軌跡」

測地線の定義 2.

記号の準備 : $[a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$ とする.

計量の定められた 多様体 M 内の 曲線

$$\begin{aligned} C : [a, b] &\rightarrow M \\ t &\mapsto c(t) \end{aligned}$$

が 測地線 である とは,

任意の t ($a < t < b$) において $\varepsilon > 0$ が存在して,
次のことが成り立つこと.

任意の 2 点 t_1, t_2 ($t - \varepsilon < t_1, t_2 < t + \varepsilon$) に対して,

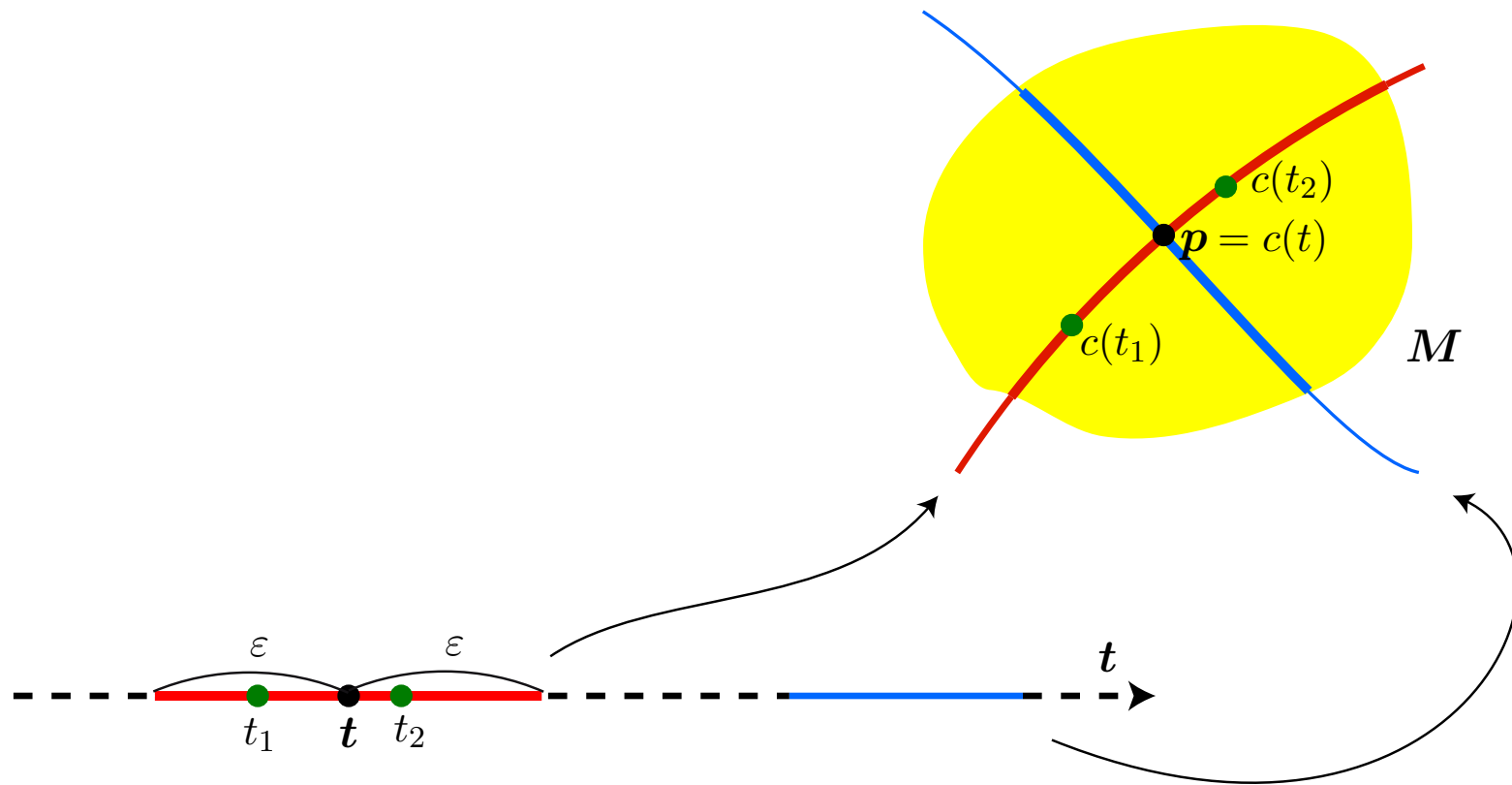
M の 2 点 $p_1 = c(t_1)$ と $p_2 = c(t_2)$ を結ぶ

最短線が $c([t_1, t_2])$ である

こと.

定義 2 の一部

任意の 2 点 t_1, t_2 ($t - \varepsilon < t_1, t_2 < t + \varepsilon$) に対して,
 M の 2 点 $p_1 = c(t_1)$ と $p_2 = c(t_2)$ を結ぶ
 最短線が $c([t_1, t_2])$ である



比較

測地線の定義 1. 多様体 M 内の曲線 C が 測地線 である とは

C 上の任意の点 p において,

p を含む M の開集合 U が存在して,

$U \cap C$ の任意の 2 点 p_1, p_2 を結ぶ最短線が C の一部になる

測地線の定義 2. 多様体 M 内の曲線 $c(t)$ が 測地線 である とは

任意の t ($a < t < b$) において $\varepsilon > 0$ が存在して,

次のことが成り立つこと.

任意の 2 点 t_1, t_2 ($t - \varepsilon < t_1, t_2 < t + \varepsilon$) に対して,

M の 2 点 $p_1 = c(t_1), p_2 = c(t_2)$ を結ぶ

最短線が $c([t_1, t_2])$ である

展望： 定義2 に基づいて 測地線の微分方程式 が得られる.

初速度 が与えられると, その後の 測地線 “まっすぐな線” が
微分方程式 で求められる.

予習：

計量 $G = (g_{ij})$ から n^3 個の添字をもつ関数 Γ^i_{jk} の集まり

接続 $\nabla = \{\Gamma^i_{jk}\}$ が構成されて

$$\frac{d^2 c_i}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma^i_{jk}(c(t)) \frac{dc_j}{dt} \frac{dc_k}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

測地線の微分方程式

測地線 (まっすぐな線) は計量から決まる.

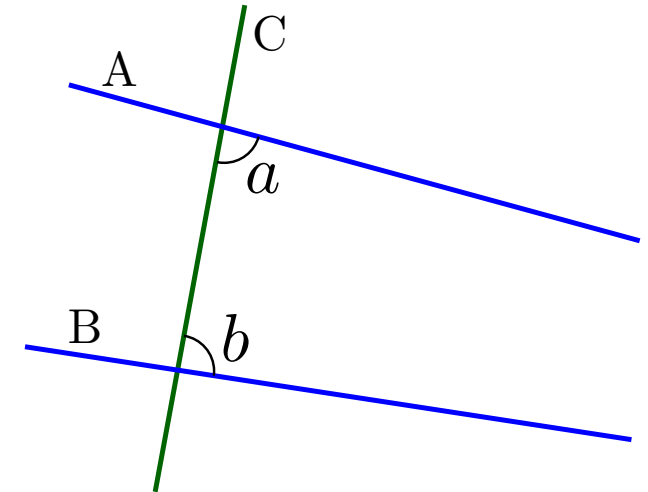
非ユークリッド幾何学

史上最も難しかった数学の問題

B12

ユークリッドの5公準 (直訳に近い)

- 第1公準：任意の点から任意の点に直線を引く
- 第2公準：線分を延長して直線にする
- 第3公準：任意の点を中心に任意の半径で円を描く
- 第4公準：すべての直角は等しい
- 第5公準： 下記 **長い命題**



一直線 C が2直線 A, B と交わり、同じ側の内角 a, b の和 $a + b$ を2直角より小さくするならば、この2直線は限りなく延長すると2直角より小さい内角のある側で交わる

↓

第5公理： **直線** ℓ と ℓ 上にない点 P に対して、 P を通り ℓ と交わらない**直線**が**ただ1つ** 存在する.

第1公理： 与えられた2点を通る**直線**がただ1つ存在する

長年の問題：第5公理は定理なのか？

ガウス, ボヤイ父子, ロバチェフスキ, ...

第5公理： 直線 ℓ と ℓ 上にない点 P に対して,
 P を通り ℓ と交わらない直線が
 ただ1つ 存在する.

注意

曲面の幾何は 候補であるが, 第1公理を満たさないものは問題外.
 球面, 円柱, 円錐, ...

非ユークリッド幾何学

双曲幾何の上半平面モデル

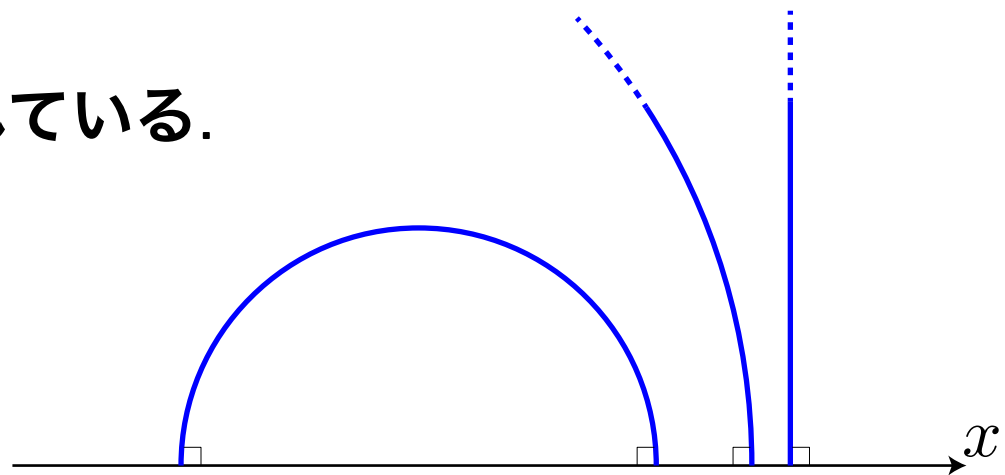
$$\mathcal{H} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \} \quad \text{計量} : \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

この幾何学では、測地線は

$$\text{つまり} \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

- x 軸上に中心のある 上半円
- x 軸と垂直な 上半直線

の2種類になることが知られている.

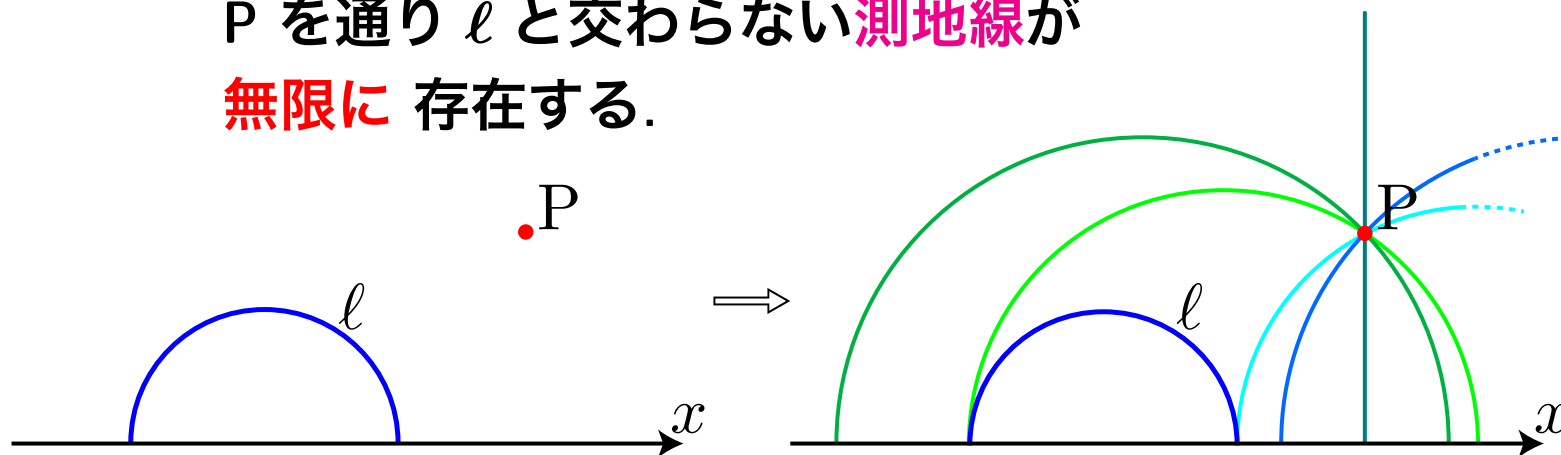


この幾何学は

第1公理： 与えられた2点を通る測地線がただ1つ存在する
をみたす。しかし、この幾何学では

測地線 ℓ と ℓ 上にない点 P に対して、
第5公理： P を通り ℓ と交わらない測地線が
ただ1つ 存在する。(P を通る ℓ の平行線 のこと)
が成り立たない。実際、次が成り立つ：

測地線 ℓ と ℓ 上にない点 P に対して、
 P を通り ℓ と交わらない測地線が
無限に 存在する。



非ユークリッド幾何 は存在した！

第5公理 は証明できない

測地線の方程式 学ぶべし