**事実A．３次以下の多項式 $p(x)$ が $p(1) = 0, \quad p'(2) = 0$ をみたすならば**

$$p(x) = \alpha(x-1)(x-2)^2 + \beta(x-1)(x-3)$$

**($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) と表せる.**

**この事実は 線形代数的 な事実であり, 証明は 線形代数 となる.**
**線形代数の用語は 青 にする.**

**用語の意味を確認しながら "読み進む" こと.**

$$P_1 = (x-1)(x-2)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$
$$P_2 = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

**とおく.**

**事実A．３次以下の多項式** $p(x)$ **が** $p(1) = 0$, $p'(2) = 0$ **をみたすならば**

$$p(x) = \alpha(x-1)(x-2)^2 + \beta(x-1)(x-3)$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ **と表せる.**

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x]_3 &= \{\text{ ３次以下の多項式 }\} \\ &= \{\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid \text{各 } \alpha_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

**とする.**

$\mathbb{R}[x]_3$ **は ４次元 の 線形空間 で,** $\{x^3, x^2, x, 1\}$ **が 基底 となる.**

$$P_1 = (x-1)(x-2)^2, \quad P_2 = (x-1)(x-3) \quad \in \mathbb{R}[x]_3$$

**事実A．3次以下の多項式 $p(x)$ が $p(1) = 0, \quad p'(2) = 0$ をみたすならば**

$$p(x) = \alpha(x-1)(x-2)^2 + \beta(x-1)(x-3)$$

**$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ と表せる.**

$$\begin{array}{lcccl} \textbf{写像} & L: & \mathbb{R}[x]_3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & f(x) & \mapsto & L(f(x)) = (\, f(1), f'(2)\,) \end{array}$$

**は 線形写像 となる.** $f(x)$ **を** $f$ **と省略すると**

$$L(f+g) = L(f) + L(g)$$

$$(\,(f+g)(1), (f+g)'(2)\,) = (f(1), f'(2)) + (g(1), g'(2))$$

$$L(\alpha f) = \alpha L(f) \qquad (\,(\alpha f)(1),\ (\alpha f)'(2)) = \alpha(f(1),\ f'(2))$$

**事実A．3次以下の多項式 $p(x)$ が $p(1)=0,\quad p'(2)=0$ をみたすならば**

$$p(x) = \alpha(x-1)(x-2)^2 + \beta(x-1)(x-3)$$

**$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ と表せる.**

$$\text{写像}\quad L : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x]_3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ f(x) & \mapsto & L(f(x)) = (\,f(1), f'(2)\,) \end{array}$$

**は 線形写像 となる.**

**今 知りたいのは $L$ の核**

$$\mathrm{Ker}\ L = \{\, p(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid L(p(x)) = \vec{0}\,\}$$

**に他ならない.**

$$L(f(x)) = (\, f(1), f'(2)\,)$$

線形写像 $L : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^2$ 　について考える.

$$\text{Ker } L \ni P_1 = (x-1)(x-2)^2, \quad P_2 = (x-1)(x-3).$$

つまり
$$L(P_1) = \vec{0}, \quad L(P_2) = \vec{0}$$

また, $L$ は 全射 ( Im $L = \mathbb{R}^2$) である.

証明： $q_1 = x,\ q_2 = x^2 \in \mathbb{R}[x]_3$ とする.

$$L(q_1) = (q_1(1), q_1'(2)) = (1, 1),$$
$$L(q_2) = (q_2(1), q_2'(2)) = (1, 4),$$

なので $(1,1), (1,4) \in$ Im $L$.

この２つは $\mathbb{R}^2$ を 生成する ので Im $L = \mathbb{R}^2$. □

$\dim$ Im $L = 2$.

Ker $L$ について考える.

核 Ker と 像 Im の 次元の公式

線形写像 $f : V \to W$ に対して

$$\dim \mathrm{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\ f = \dim V$$

を $L : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^2$ に適用して

$$\dim \mathrm{Ker}\ L = \dim \mathbb{R}[x]_3 - \dim \mathrm{Im}\ L = 4 - 2 = 2.$$

よって, Ker $L$ は $\mathbb{R}[x]_3$ の中の ２次元 の 部分空間.

$\dim \mathrm{Ker}\ L = 2.$

$$\mathrm{Ker}\ L \ni \begin{matrix} P_1 = (x-1)(x-2)^2 \\ P_2 = (x-1)(x-3) \end{matrix}.$$

$P_1$ と $P_2$ は 1 次独立.

証明：$c_1 P_1 + c_2 P_2 = 0$ とおく. つまり

$$c_1(x-1)(x-2)^2 + c_2(x-1)(x-3) = 0.$$

３次の係数から $c_1 = 0$. 次に $x = 0$ を代入して $3c_2 = 0$. □

ここで

定理. $n$ 次元線形空間 の中の, $n$ 個の（つまり次元と同数の）ベクトルは, 1 次独立 ならば 基底 になる.

により, $\{P_1, P_2\}$ は Ker $L$ の基底となる.

特に, Ker $L$ を 生成する. Ker $L = < P_1, P_2 >$. つまり

Ker $L$ に属す任意の元 $p(x)$ は $P_1$ と $P_2$ の 1 次結合.

この文章の意味は

事実A. 3 次以下の多項式 $p(x)$ が $p(1) = 0, \quad p'(2) = 0$ をみたすならば

$$p(x) = \alpha(x-1)(x-2)^2 + \beta(x-1)(x-3)$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) と表せる.

に他ならない. 証明終

事実 B.　$C^\infty$ 級の関数 $y = y(x)$ について　微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$　の解は

$$y(x) = \alpha e^{2x}\cos x + \beta e^{2x}\sin x$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ と表せる.

線形微分方程式 に関する この事実も 線形代数的 な事実である.

$C^\infty(\mathbb{R})$ で $C^\infty$ 級（無限回微分可能）の 1 変数関数のなす線形空間（無限次元）を表すとする.

$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を "微分" を表す線形写像とすれば

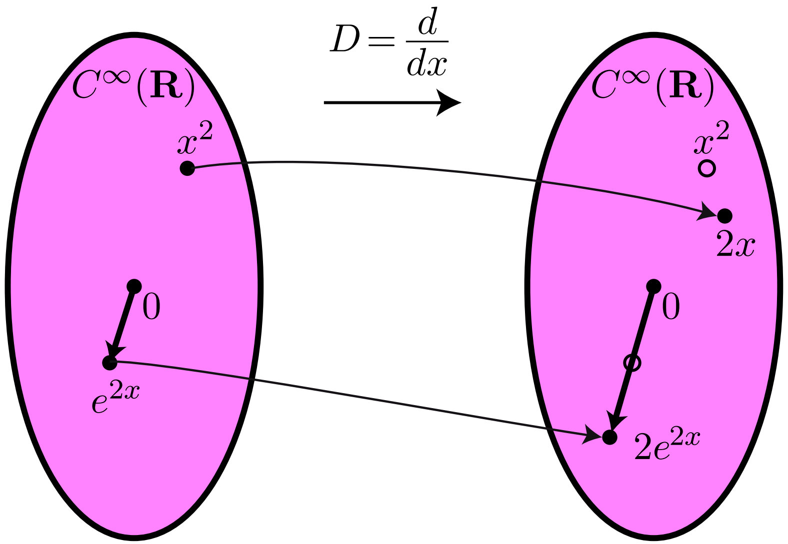
$$D(f+g) = D(f) + D(g) \quad \Leftrightarrow \quad (f+g)' = f' + g'$$

$$D(\alpha f) = \alpha D(f) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha f)' = \alpha f'$$

## $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ は "微分" を表す線形写像

$$D(x^2) = 2x$$

$$D(e^{2x}) = 2e^{2x}$$




---

「微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ を解く」こと　は,

「線形写像

$$\begin{array}{rccc} (D^2 - 4D + 5) : & C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ & y & \mapsto & y'' - 4y' + 5y \end{array}$$

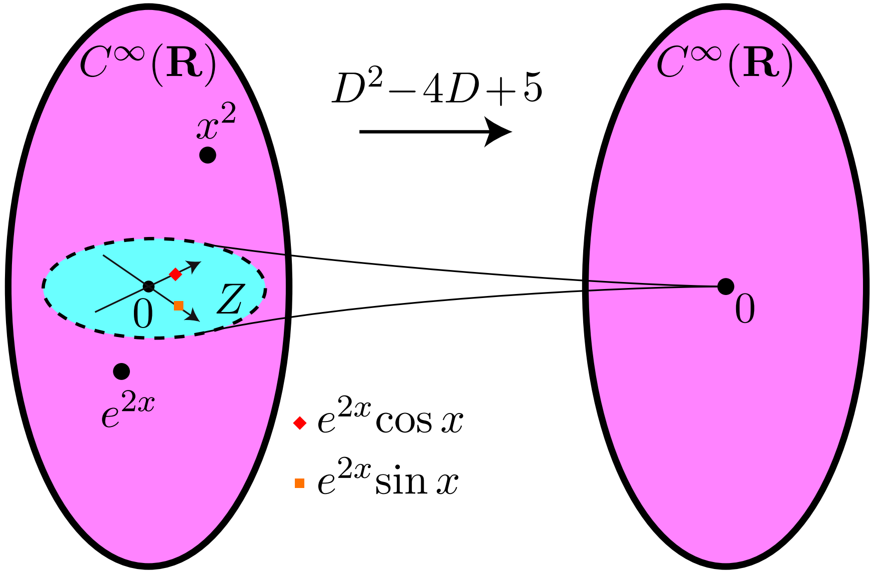
の 核 $Z = \mathrm{Ker}\ (D^2 - 4D + 5)$ を求める」こと

に対応する.

事実B は, $C^\infty(\mathbb{R})$ 内で 核 $Z = \mathrm{Ker}\ (D^2 - 4D + 5)$ が

$$\{\, e^{2x}\cos x,\ e^{2x}\sin x \,\}$$

を 基底 とする ２次元 の 部分空間 であることを示している.




２階の 線形微分方程式の解の集合 は ２次元の線形空間になる,

という覚え方もできる.　ここまで