線形代数の用語の確認 1

青い字は線形代数の用語

電通大数学・山田

例文 1-1. n 次以下の（x の）実数係数多項式の集合 $\mathbb{R}[x]_n$ は**線形空間**である. p.104

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[x]_n &= \{n \text{ 次以下の実数係数多項式}\} \\ &= \{a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid \text{各 } a_i \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

例文 1-2. $\mathbb{R}[x]_n$ は $(n+1)$ **次元**. $\dim \mathbb{R}[x]_n = n+1$.
$(x^n, \ldots, x^2, x, 1)$ は $\mathbb{R}[x]_n$ の**基底**である.

例文 1-3. $n = 2$ とする. $\mathbb{R}[x]_2$ 内で, 次の３つは**１次従属**.

$$p_1 = x^2 + 3x - 4, \quad p_2 = 4x^2 - 2x + 5, \quad p_3 = x^2 - 3x + 5.$$

例文 1-4. なぜなら, 次の **非自明な１次関係式** が成立するため

$$5p_1 - 3p_2 + 7p_3 = 0$$

例文 1-5. $\mathbb{R}[x]_2$ 内で, $a \in \mathbb{R}$ として,

$$V(a) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid p(a) = 0\}$$

は（a に関わらず）$\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間であり, 証明せよ！

例文 1-6. $V(a)$ の次元は 2. $\dim V(a) = 2.$

$a = 1$ とする.

$(x(x-1), (x-1))$ が $V(1)$ の基底.

$((x-1)^2, (x-1))$ も $V(1)$ の基底. 基底をなす個数は一定

例文 1-7. 部分空間の共通部分 は部分空間

$V(1) \cap V(-1)$ も $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間.

例文 1-8. 1 次元. $\dim(V(1) \cap V(-1)) = 1.$

$V(1) \cap V(-1)$ の基底として $(\,(x+1)(x-1)\,)$

例文 2-1. $m \times n$ 行列の集合 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ は**線形空間**である.

例文 2-2. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$. **基底**として

$$\left(\{E_{i,j}\}\right) \qquad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

ただし, $E_{i,j}$ は, (i,j) 成分のみ 1, それ以外 0 の行列 とする.

例文 2-3. n 次正方行列の空間 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ で, $\dim M_{n\times n}(\mathbb{R}) = n^2$

対称行列（${}^tA = A$）のなす部分集合を S_n とし,

交代行列（${}^tA = -A$）のなす部分集合を T_n とする. p.33

いずれも $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 内の**部分空間**. 証明せよ！

S_3 の元： $\begin{bmatrix} a_1 & b & c \\ b & a_2 & d \\ c & d & a_3 \end{bmatrix}$ T_3 の元： $\begin{bmatrix} 0 & p & -q \\ -p & 0 & r \\ q & -r & 0 \end{bmatrix}$

例文 2-4. $$\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim T_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

例文 2-5. **基底**

$$\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad n = 3 \text{ のとき } \dim S_3 = 6.$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\dim T_n = \frac{n(n-1)}{2}. \qquad n = 3 \text{ のとき } \dim T_3 = 3.$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

さらに意欲的に進む

高次元の線形空間

例文 3-1.

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}[x]_L) = \left\{ \begin{array}{l} L \text{ 次以下の（} x \text{ の）実数係数多項式} \\ \text{が成分の } m \times n \text{ 行列} \end{array} \right\}$$

は線形空間で，$(L+1)mn$ 次元.

例文 3-2. $M_{m\times n}(\mathbb{R}[x]_L)$ の基底として

$$\left(\{x^k E_{i,j}\} \right) \qquad (0 \leq k \leq L, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

$m = n = L = 2$ のとき， $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}[x]_2) = \mathbf{12}$.

$$\begin{bmatrix} a_2x^2 + a_1x + a_0 & b_2x^2 + b_1x + b_0 \\ c_2x^2 + c_1x + c_0 & d_2x^2 + d_1x + d_0 \end{bmatrix}$$

例文 3-3. $M_{n\times n}(\mathbb{R}[x]_L)$ の部分空間

$$W = \{A(x) \in M_{n\times n}(\mathbb{R}[x]_L) \mid A(1) \in S_n\}$$

L 次以下の多項式を成分にもつ n 次正方行列で,
$x = 1$ を代入すると対称行列になる行列 のなす部分空間

例文 3-4. $n = L = 2$ とする. $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}[x]_2) = \mathbf{12}$.

$$Z_1 = \{A(x) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}[x]_2) \mid A(1) \in S_2\}$$
$$Z_2 = \{A(x) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}[x]_2) \mid A(-1) \in T_2\}$$

$Z_1 \cap Z_2$ は $M_{2\times 2}(\mathbb{R}[x]_2)$ の部分空間で, $\dim(Z_1 \cap Z_2) = \mathbf{8}$.

基底を求めよ！

ここまで