内積 の理論

電通大数学：山田

$\mathbb{R}^n$ において, 成分を $\vec{a} = {}^t(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\vec{b} = {}^t(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ と表わすとき,

次の関数 を**ユークリッド内積（標準内積）**という.

$$
\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}, \\
(\vec{a}, \vec{b}) \quad &\longmapsto \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\
&\qquad\qquad = {}^t\vec{a}\,\vec{b} \\
&\qquad\qquad = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{ユ}
$$

内積を $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と表す場合もある.

ユークリッド内積の３大性質

双線形：
$$\langle c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2, \vec{b}\rangle = c_1\langle\vec{a}_1, \vec{b}\rangle + c_2\langle\vec{a}_2, \vec{b}\rangle,$$
$$\langle\vec{a}, d_1\vec{b}_1 + d_2\vec{b}_2\rangle = d_1\langle\vec{a}, \vec{b}_1\rangle + d_2\langle\vec{a}, \vec{b}_2\rangle.$$

対称性： $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle\vec{b}, \vec{a}\rangle.$

非負性： $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle \geqq 0.$ さらに $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$

【発想の転換：抽象化】 性質から 公理 へ

この３性質をみたす関数を「内積」と呼ぶことにする.

内積の３公理

双線形： $(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2, \vec{b}) = c_1(\vec{a}_1, \vec{b}) + c_2(\vec{a}_2, \vec{b})$,

$(\vec{a}, d_1\vec{b}_1 + d_2\vec{b}_2) = d_1(\vec{a}, \vec{b}_1) + d_2(\vec{a}, \vec{b}_2)$.

対称性： $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

非負性： $(\vec{a}, \vec{a}) \geqq 0$.　さらに $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

定義 (p.117)：一般に，線形空間 V に対して，関数

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$$

が，上の３つの性質を（「内積の３公理」として）みたすとき，
その関数 $(\cdot, \cdot)$ を V 上の **内積** と呼ぶことにする．
内積を指定された線形空間を **内積空間** という．
注意：１つの V に対して内積は一意的ではない．

今後，$\mathbb{R}^n$ の ユークリッド内積 は 内積 の

$$V = \mathbb{R}^n$$ で 計算法 (ユ) の具体例

に過ぎない.

定義 ノルム（長さ） $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}$ と定める.

平面や空間で (ユ) の場合「ベクトルの長さ」.

ノルムの性質 (p.183)　どんな内積空間でも 次のことが成り立つ

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$

(b) $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$

(c) コーシー・シュワルツの不等式 $|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

(d) ３角不等式 $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

$$\big|\, \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| \,\big| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

証明も有意義

ノルムから距離へ：　$d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|$　とおくと，関数

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

は **距離** (distance) の公理をみたす：

距離の３公理

- **非負性**：　$d(\vec{a}, \vec{b}) \geqq 0.$　さらに $d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}.$
- **対称性**：　$d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a}).$
- **３角不等式**：　$d(\vec{a}, \vec{c}) \leq d(\vec{a}, \vec{b}) + d(\vec{b}, \vec{c})$

応用：一般の空間 V 内で「$\vec{a}$ に近いのは $\vec{c}$ より $\vec{b}$」などの考察を数値化できる.

$$d(\vec{a}, \vec{b}) < d(\vec{a}, \vec{c}).$$

$\Rightarrow$ 近似の理論

内積の例　ユークリッド内積 以外　(p.182, 183)

（例１）$\mathbb{R}^3$ 内の，２次元の線形部分空間 V を 次で定め，

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - 4z = 0 \right\}$$

内積として $\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積を V に制限したもの（計算が同じ）を用いる.

・V の基底 $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に関する 内積行列 は

$$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

(例２) $\mathbb{R}^2$ で, 次のように定めた関数は内積である.

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$$

$$= [a_1, a_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

標準基底 $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ に関する 内積行列が $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

むしろ, 内積行列で 内積を定めた と考えてもよい.

単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ の場合が (ユ)

内積行列

n 次元の線形空間 V に内積 $(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{R}$ が与えられたとする.
また, V の基底 $\mathcal{B}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n)$ を1つ固定する.

このとき, 次の行列を **内積 $(\cdot,\cdot)$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する内積行列** という.

$$T\ (=T_{\mathcal{B}})=\begin{bmatrix}(\vec{b}_1,\vec{b}_1) & (\vec{b}_1,\vec{b}_2) & \cdots & (\vec{b}_1,\vec{b}_n)\\ (\vec{b}_2,\vec{b}_1) & (\vec{b}_2,\vec{b}_2) & \cdots & (\vec{b}_2,\vec{b}_n)\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ (\vec{b}_n,\vec{b}_1) & (\vec{b}_n,\vec{b}_2) & \cdots & (\vec{b}_n,\vec{b}_n)\end{bmatrix}$$

(i,j)-成分は $(\vec{b}_i,\vec{b}_j)$

具体例を振り返れ

座標と内積行列 を用いた 便利な公式

［座標の復習］V の基底 $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ を 1 つ固定する.
V の任意のベクトル $\vec{v}$ は，基底の 1 次結合

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \cdots + c_n \vec{b}_n \quad (\text{各 } c_i \in \mathbb{R})$$

で一意的に表される. この係数を並べた

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

を $\vec{v}$ の 基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 と呼ぶのだった.

便利な公式　“座標で内積行列を挟む”

$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_n\vec{b}_n$　と
$\vec{w} = d_1\vec{b}_1 + d_2\vec{b}_2 + \cdots + d_n\vec{b}_n$　に対し

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$= {}^t[\vec{v}]_{\mathcal{B}}\, T_{\mathcal{B}}\, [\vec{w}]_{\mathcal{B}}.$$

$\boxed{\text{例題}}$　$(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = 8,\ (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 3,\ (\vec{a}_2, \vec{a}_2) = 4$　のとき,

$$\left(5\vec{a}_1 + 9\vec{a}_2, 6\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 \right) = \text{？}$$

$30(\vec{a}_1, \vec{a}_1) + 15(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \cdots$ と展開するより早い方法がある！

内積行列の特徴

(i, j)-成分は $(\vec{b}_i, \vec{b}_j)$

$$T\ (= T_{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} (\vec{b}_1, \vec{b}_1) & (\vec{b}_1, \vec{b}_2) & \cdots & (\vec{b}_1, \vec{b}_n) \\ (\vec{b}_2, \vec{b}_1) & (\vec{b}_2, \vec{b}_2) & \cdots & (\vec{b}_2, \vec{b}_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\vec{b}_n, \vec{b}_1) & (\vec{b}_n, \vec{b}_2) & \cdots & (\vec{b}_n, \vec{b}_n) \end{bmatrix}$$

(1) T は 対称行列　：内積の対称性に由来.

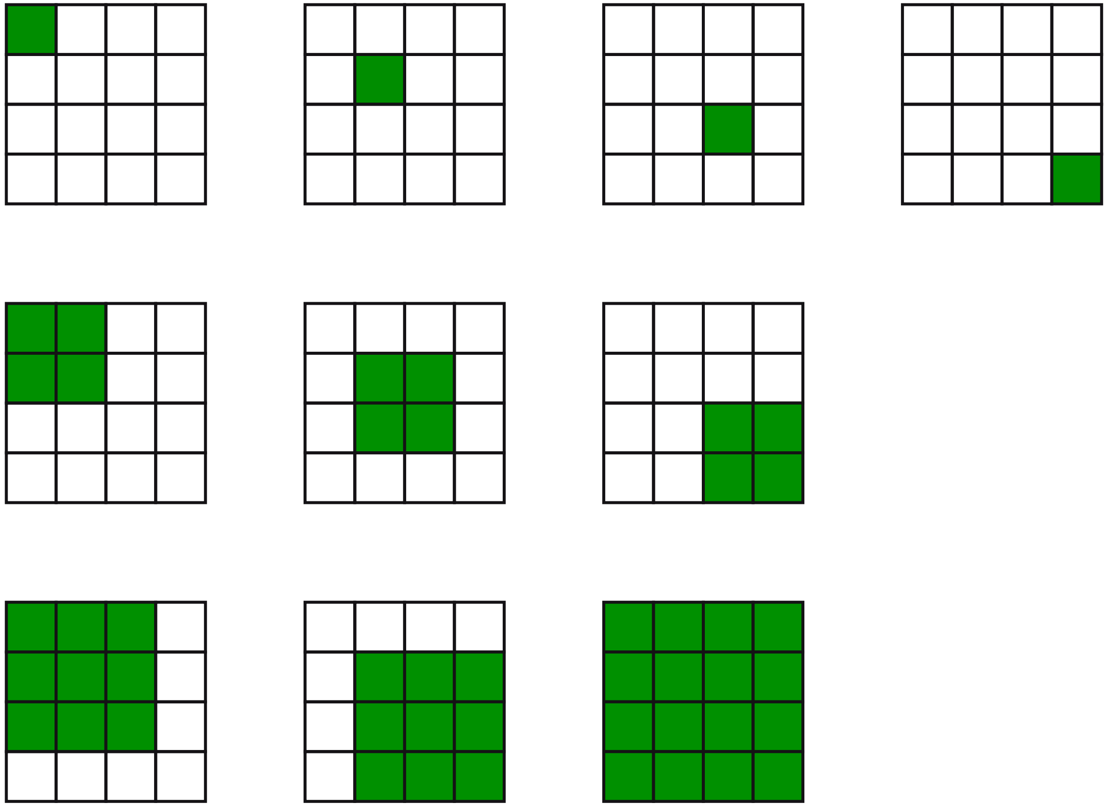
(2) T は 次をみたす：内積の非負性に由来.

対角線上の 任意の部分正方小行列 の行列式が正

特に，対角成分は正, T 自身の行列式 も正.

対角線上の 部分正方小行列 とは

例えば 4×4 行列の場合，次の １０通り



内積行列 T は これらの行列式がすべて 正

一旦停止

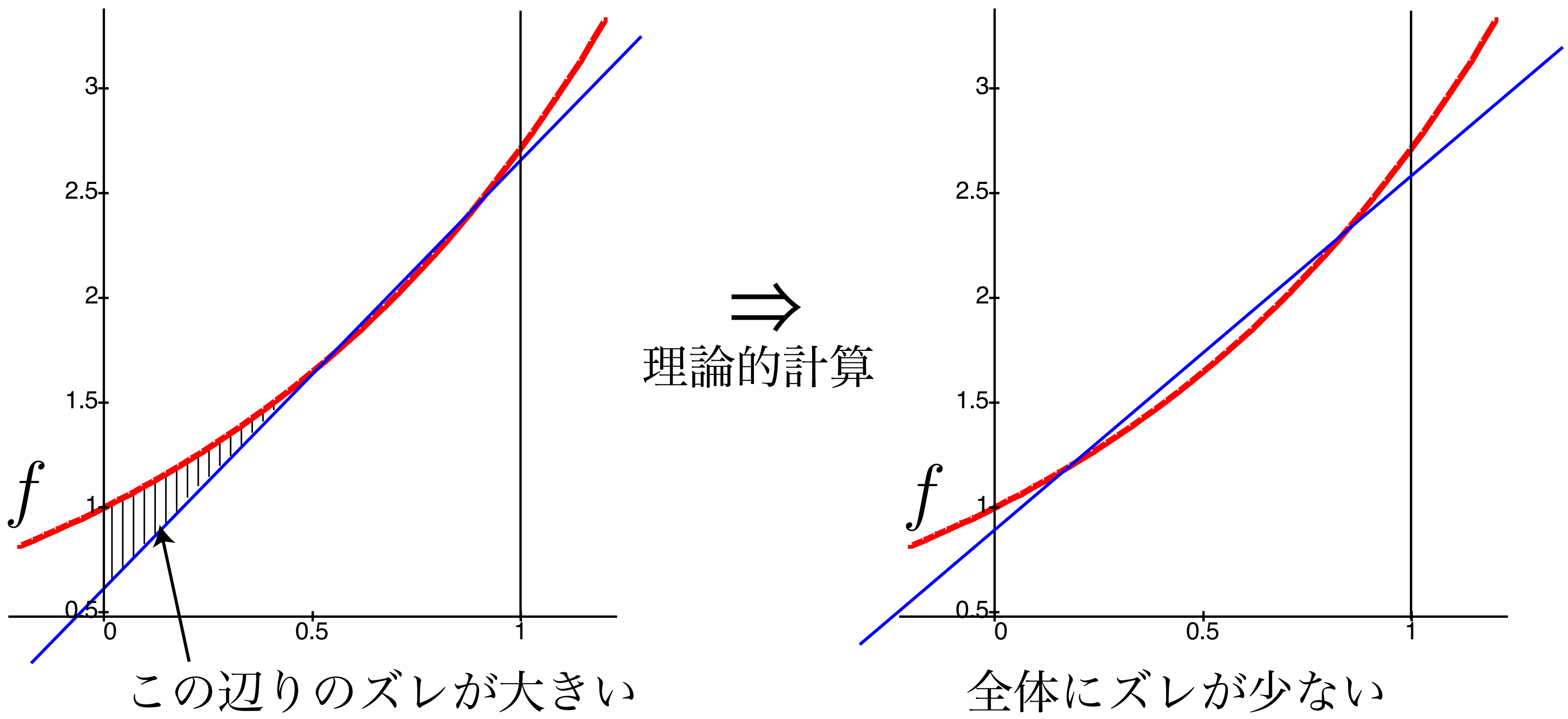
[応用]　関数のなす線形空間 と内積 (p.204)

電通大数学：山田

$C^0[0,1]$： 区間 $[0,1]$ 上の連続関数の集合　**線形空間となる**

関数 $f(x) = e^x$ を $C^0[0,1]$ の元 f とみなす.

課題：**1 次関数 $ax+b$ のうちで最も $f(x)$ に “近い” 関数 $p(x)$**



考え方：$C^0[0,1]$ を内積空間にする p.183, 204

$$
\begin{array}{rcccl}
(\cdot,\cdot): & C^0[0,1]\times C^0[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}, & \\
 & (f_1,f_2) & \longmapsto & (f_1,f_2) & \\
 & & & & = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx.
\end{array}
$$

内積の公理は　双線形性，対称性，非負性　の３つ.

そして，一般論

内積空間では，２点間の距離 を差のノルム

$$d(f,p) = \|f-p\|$$

で与えることができる.

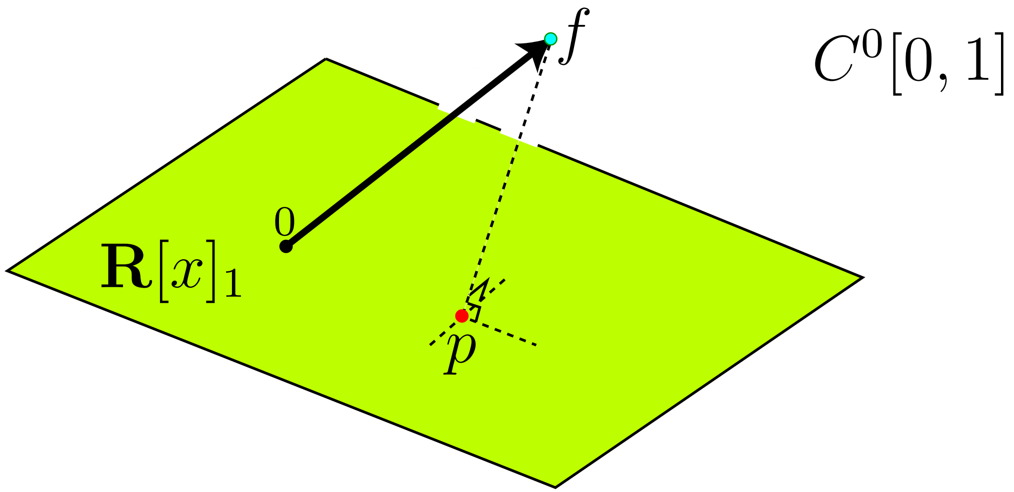
課題 は　p が 1 次関数の集合 $\mathrm{R}[x]_1$ を動くときの

$$\|f-p\|^2 \text{ の最小値を与える } p(x) = ax + b \in \mathrm{R}[x]_1$$

と解釈できる.

$\mathbf{R}[x]_1$ は $C^0[0,1]$ の部分空間なので,

求める p は　f の $\mathbf{R}[x]_1$ への正射影　に他ならない.



正射影の公式 (p.186)

$\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r)$ が W の正規直交基底のとき,

$\vec{v}$ の W への正射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = (\vec{v}, \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}, \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\vec{v}, \vec{u}_r)\vec{u}_r$$

ここまで