正規直交基底 と 正射影

電通大：山田

正規直交基底

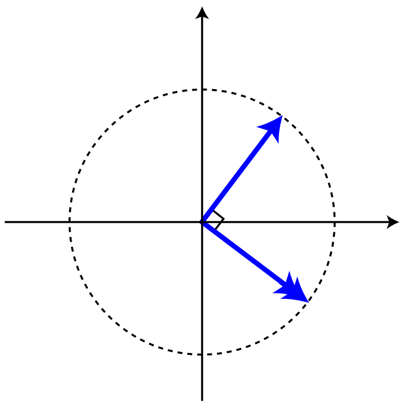
[設定]　V を内積空間（内積を備えた線形空間）とする.

定義. (p.184)
V の基底 $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ が<u>正規</u> <u>直交</u>基底である, とは

$$(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \quad \text{正規} \\ 0 & i \neq j \quad \text{直交} \end{cases}$$

例 1. $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積に関して,
標準基底 $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ は正規直交.

例 2. $\mathbb{R}^2$ のユークリッド内積に関して,
基底 $\mathcal{U} = \left(\vec{a}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \vec{a}_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$ は正規直交.



例３. $\mathbb{R}^3$ **の部分空間** V **に ユークリッド内積の制限を備えるとき**

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - 4z = 0 \right\}$$

基底 $\mathcal{U} = \left(\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ **は正規直交.**

例４. $\mathbb{R}^2$ **に 次の内積を備えるとき**

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) = [a_1, a_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

基底 $\mathcal{U} = \left(\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ **は正規直交.**

$\boxed{\text{役に立つメモ}}$ **正規直交基底** $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ に対して

$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n$ とする.

$$(\vec{u},\ \vec{u}_1) = (c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n,\ \vec{u}_1) = ?$$

$\boxed{\text{役に立つメモ}}$ 正規直交基底 $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ に対して

$\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n$ とする.

$$(\vec{u}, \ \vec{u}_1) = (c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n, \ \vec{u}_1) = c_1$$

$\vec{u}_1$ の係数 が得られる.

理由：内積の双線形性 そして 正規直交性 から

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= c_1(\vec{u}_1, \vec{u}_1) + c_2(\vec{u}_2, \vec{u}_1) + \cdots + c_n(\vec{u}_n, \vec{u}_1) \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 \\ &= c_1 \end{aligned}$$

一般には

$$(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n, \ \vec{u}_j) = c_j$$

定理 p.186

どんな 内積空間 でも **正規直交基底 が存在する**.

例えば, 空間内の "斜めの平面" にも正規直交基底が存在する.

っていうか

ただの基底から 正規直交基底を構成する アルゴリズムがある！

「グラム・シュミットの正規直交化」p.188

$\Rightarrow$ これが本日のテーマ

その前に

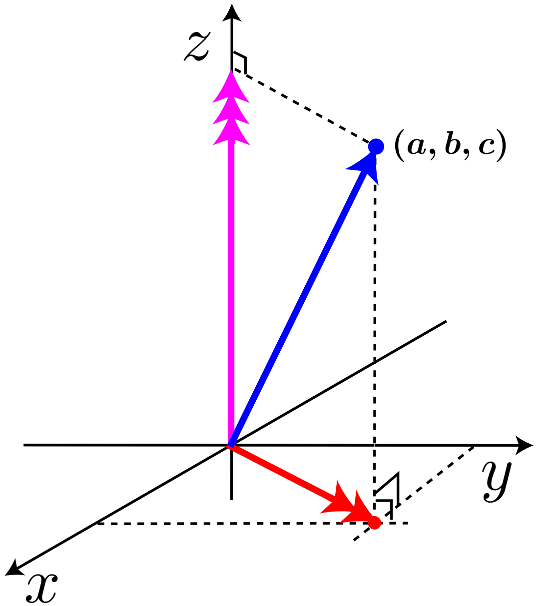
正規直交基底 が何の役に立つのかを解説. それは......

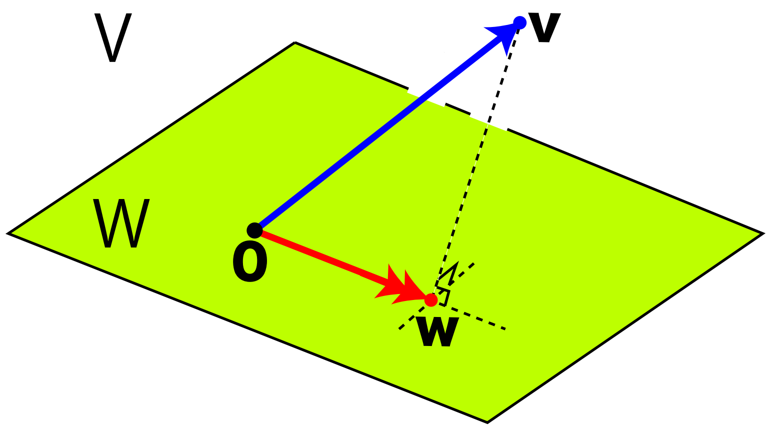
正射影 p.186 垂線をおろす

xyz-空間の中の点 $A(a,b,c)$ の場合,

(1) xy-平面への正射影は $(a,b,0)$.

(2) z-軸への正射影は $(0,0,c)$.





それほど難しい概念ではないはずだが, 数学としての完全な定義は意外に難しい.

[設定]　V を内積空間. W を V の線形部分空間とする.

定義. (p.189).「W の直交補空間（記号 $W^\perp$）」

$$W^\perp = \{\, \vec{x} \in V \mid \text{任意の } \vec{w} \in W \text{ に対して } (\vec{x}, \vec{w}) = 0 \,\}$$

$$= \{\, \vec{x} \in V \mid \vec{x} \perp W \quad (\text{任意の } \vec{w} \in W \text{ に対して } \vec{x} \perp \vec{w}) \,\}$$

例：通常の $\mathbb{R}^3$ を xyz-空間とみたとき,

(1) (xy-平面)$^\perp$ = (z-軸).　　　(2) (z-軸)$^\perp$ = (xy-平面).

[設定]　V を内積空間. W を V の線形部分空間とする.

定義. (p.189).「W の直交補空間（記号 $W^\perp$）」

$$W^\perp = \{\, \vec{x} \in V \mid \text{任意の } \vec{w} \in W \text{ に対して } (\vec{x}, \vec{w}) = 0 \,\}$$
$$= \{\, \vec{x} \in V \mid \vec{x} \perp W \quad (\text{任意の } \vec{w} \in W \text{ に対して } \vec{x} \perp \vec{w}) \,\}$$

W と $W^\perp$ は次の関係をみたす.

- $W^\perp$ は V の線形部分空間で, $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.
- $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$.

この２つの性質を　$V = W \oplus W^\perp$　と表す.
また,（有限次元なら）　$(W^\perp)^\perp = W$.

定義：正射影

V を内積空間. W を V の線形部分空間とする.

「$\vec{v}(\in V)$ の W への正射影 $\vec{w}$」とは,

V の分解 $V = W \oplus W^{\perp}$ に対応した $\vec{v}$ の分解

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}^{\perp} \qquad (\vec{w} \in W,\ \vec{w}^{\perp} \in W^{\perp})$$

に現れる $\vec{w}$ のこと.

・$\vec{v} - \vec{w}$ は, W に属す任意のベクトルと直交する.
($\vec{v} - \vec{w} = \vec{w}^{\perp} \in W^{\perp}$ だから)

注意：$(\vec{v} - \vec{w}) \perp \vec{w}$ だが, 正射影としては, それだけでは不十分.
（W の１つのベクトルと直交しているだけでは不十分）.
W の基底をなす各ベクトルと直交していれば十分.

【正射影の公式】p.186

V を内積空間. W を V の r 次元線形部分空間とする.
$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_r)$ が W の正規直交基底のとき,

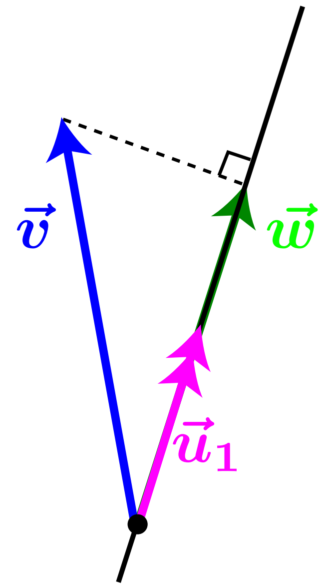
$\vec{v}$ の W への正射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = (\vec{v}, \vec{u}_1)\vec{u}_1 + (\vec{v}, \vec{u}_2)\vec{u}_2 + \cdots + (\vec{v}, \vec{u}_r)\vec{u}_r$$

メモ： そもそも $\|\vec{u}_1\| = 1$ のとき

$(\vec{v}, \vec{u}_1)\vec{u}_1$ が「$\vec{v}$ の $\vec{u}_1$ 方向への正射影」である.

$\dfrac{(\vec{v}, \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$ が「$\vec{v}$ の $\vec{b}$ 方向への正射影」である.



いざ 本日のテーマ
グラム・シュミットの正規直交化 へ

コツを２つ 知って欲しい

黒板へ