$\boxed{6}$ 生成する空間

線形と言えば，足し算とスカラー倍

電通大数学：山田

記号：線形空間 V 内で,
ベクトルの組 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ の1次結合 の集合

$$< \ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \ >$$

$$= \{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}.$$

を $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ が 生成する線形空間 という.

問

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{9} \end{bmatrix} \quad \mathbf{?} \in \mathbf{?} \quad \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} \right\}$$

答　**No**

問

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{9} \end{bmatrix} \quad \mathbf{?} \in \mathbf{?} \quad \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} \right\rangle$$

答　**Yes**

$$\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} \right\rangle$$

理由

$$\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$ だから.

しかし

$$\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$ や

$$\begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$ でも可　無駄が多い

1 次従属

無駄（他のもの の１次結合で表せるもの）を消していって...

$$\boldsymbol{W} = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\times 2$ $\times 3$ $\times 2$ $+$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix} \right\rangle$$

必要なものだけ残す．これが，この部分空間の **基底**.

基底が２本なので，この空間は **２次元** である． $\dim \boldsymbol{W} = 2$

$\Rightarrow \boxed{7}$

$\boxed{10}$ １次結合の表記法 便利 (p.115)

例えば，１次結合

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_r\vec{a}_r$$

は，行列の成分計算を応用して，次の右辺のように表示すると便利．

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_r\vec{a}_r \quad = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r\right)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$$

この表示法をさらに応用して，２つ以上の１次結合（左辺）を表すために，

$$\left(a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2\,,\; a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 \right) = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

の（右辺）のように表すのが便利である．例えば

$$\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right) = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right) = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) A$$

と書いたら，意味は次の通り．　　　　a_{12} と a_{21} の配置に注意！

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 = a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 \end{cases}$$

さらに便利なことに

特に $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ が $\mathbb{R}^m$ の (縦) ベクトルの場合は,
成分をそのまま配置して 行列計算に持ち込むことができる
（行列の列分割 (p.31) と整合）.

例えば

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

とすると,

ベクトルの関係式

$$\begin{cases} \vec{b}_1 = 3\vec{a}_1 + (-2)\vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 = 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right) = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

が成り立ち, 成分の関係は

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

例えば

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

とすると,

$\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right) = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \left(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2,\ 5\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2\right)$ の確認

$$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$