

紹介 大学院：幾何学基礎論

多様体 と 位相空間論

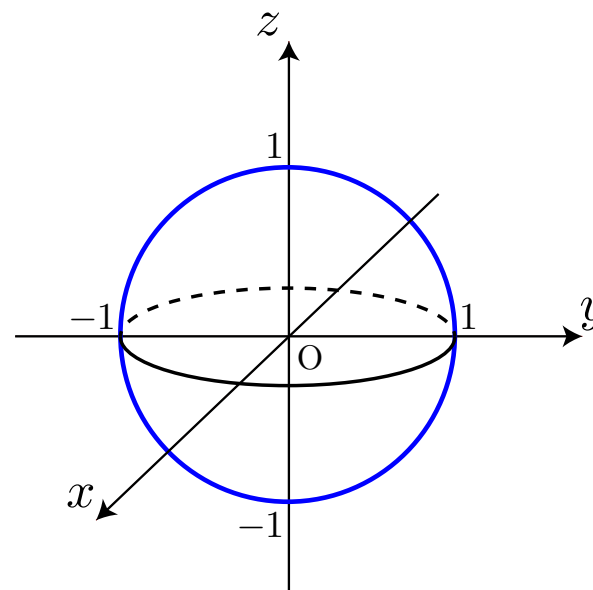
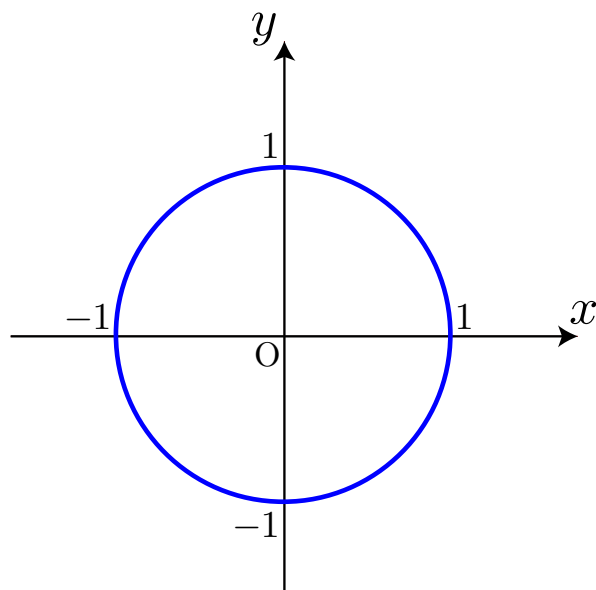
電通大 数学：山田裕一

数学で、最初に式で学ぶ図形は（直線と）**円**と**球面**であろう.

定義： n 次元球面 (n -sphere)

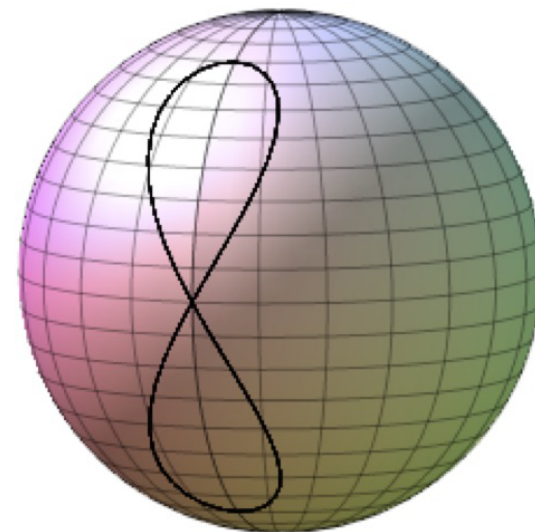
$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

$n = 1$ のときは円周, $n = 2$ のときは（普通の）球面である.



右の図は,

地球から見た 人工衛星の軌道
をモデルにした 球面内の曲線 である.



この人工衛星は 地球の中心を中心にして
回るが, 軸・回転面 が傾いている.
地球の自転も忘れないこと.

このように捉える

$$C : S^1 \rightarrow S^2$$

つまり, 円周から球面への写像である.

この写像の 微積分 を考えたいとしよう.

基礎数学の微積分では $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への関数 しか 学んでいない !!
そこで, この講義では

幾何学 を紹介しよう

多様体論 : 図形に 微積分を応用する理論.

位相空間論 : 幾何学の基礎理論.

図形は ただの点の集合 ではない

まず、幾何学では 集合 を単独で扱わない。

定義 (p7) 集合 X に対して、実数値関数

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

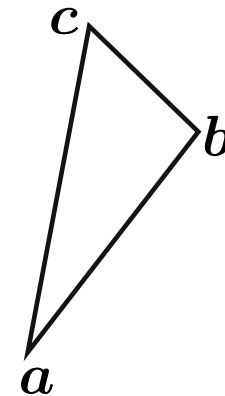
が次の3つをみたすとき、 d を X 上の距離という。

(1) 非負性 $d(a, b) \geq 0$ で、しかも $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(2) 対称性 $d(b, a) = d(a, b)$

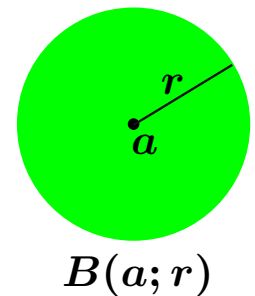
(3) 3角不等式 $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

また、組 (X, d) を距離空間 という



記号 (p7) 点 a を中心とする半径 $r (> 0)$ の開球体

$$B(a; r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} \subset X$$



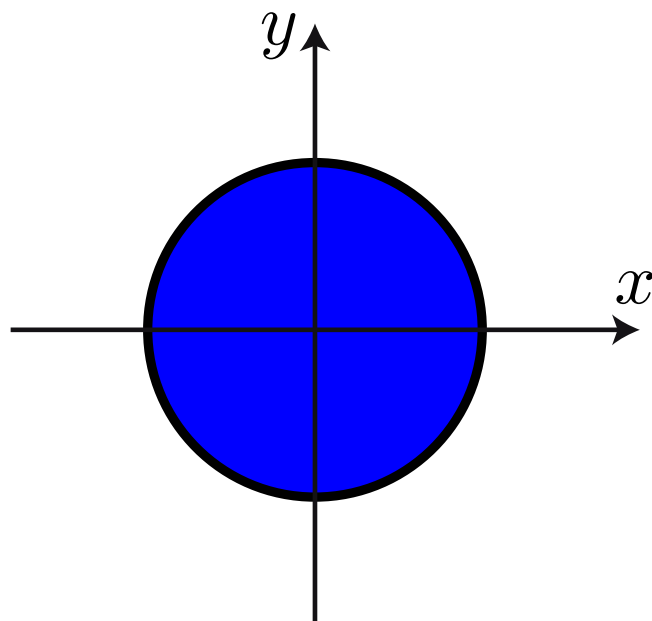
鍵となるのは、意外にも **開集合** と **連続性** の概念.

定義 (p8) 集合 U が**開集合**であるとは、次が成り立つこと

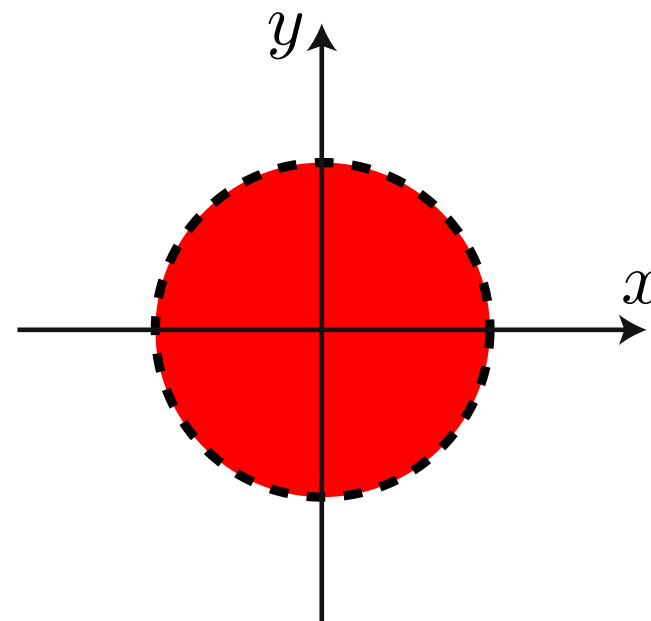
任意の U の点 x に対して,

じゅうぶん小さな値 $\varepsilon > 0$ が存在して

$$B(x; \varepsilon) \subset U.$$



閉円板 $x^2 + y^2 \leq 1$



開円板 $x^2 + y^2 < 1$

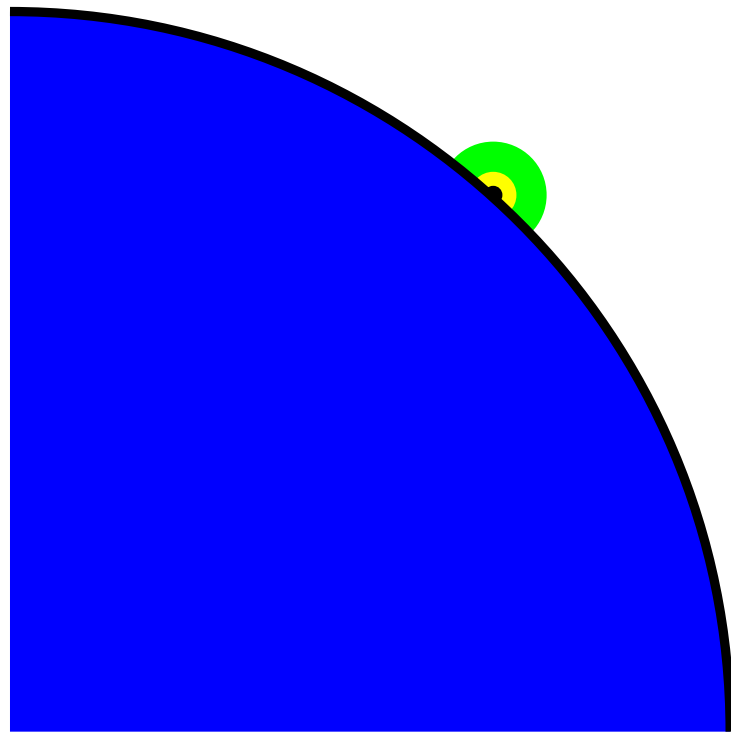
- 集合 V が**閉集合**であるとは, V の**補集合**が**開集合**であること.

定義 (p8) 集合 U が**開集合**であるとは, 次が成り立つこと

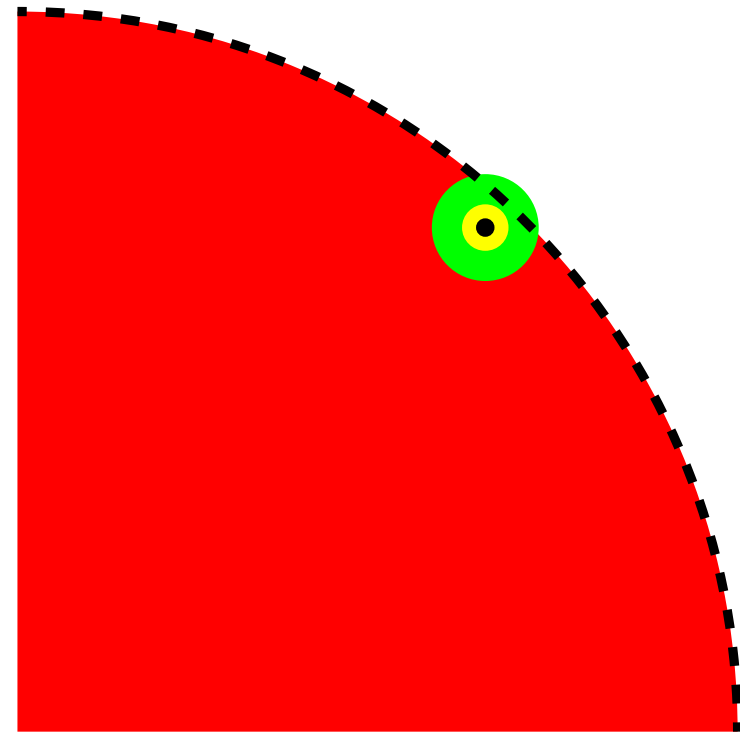
任意の U の点 x に対して,

じゅうぶん小さな値 $\varepsilon > 0$ が存在して

$$B(x; \varepsilon) \subset U.$$



閉円板 $x^2 + y^2 \leq 1$



開円板 $x^2 + y^2 < 1$

- 集合 V が **閉集合**である とは, V の**補集合**が**開集合**であること.

高校で、数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ を習った。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とか。

幾何学では **点列** $\{a_n\} \subset X$ を扱う。

この場合、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とは、とりあえず

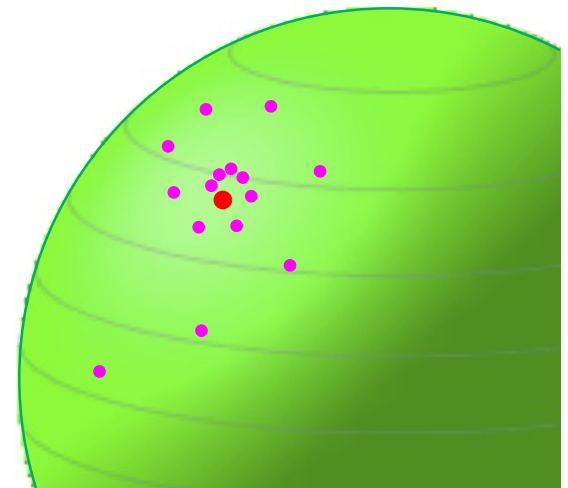
$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, \alpha) = 0$$

のことである。次のことが成り立つ。

定理 **距離空間の点列** $\{a_n\}$ について、

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ は 次と同値

α を含む任意の**開集合** U に対して、
 じゅうぶん大きな $N \in \mathbb{N}$ を選べば
 $n > N \Rightarrow a_n \in U$



定義 距離空間の間の (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像

$$f : X \rightarrow Y$$

が **連続写像** であるとは、次が成り立つこと.

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ in } X \quad \text{ならば} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\alpha) \text{ in } Y$$

実は、条件 (1) は 次のように簡潔に言い換えることができる.

(2) (p41)

Y の任意の**開集合** U に対し,
 $f^{-1}(U)$ が X の**開集合**であること

ここで, $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ f による U の逆像

$\Rightarrow$ **開集合** が鍵

関連する話題も多めに扱います.

乞う ご期待！