

線積分 と グリーンの定理

学部 1 年生の「微分積分学」からの復習

プリント 準備

xy 平面で, 2つの関数 $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ を用いた

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

というものを考える. 略して

$$\mu = Pdx + Qdy$$

これと 有向曲線 C

$$c(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

が与えられたとき, C に沿う μ の線積分

$$\int_C \mu = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

が定まる.

$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ の計算法は

$$\int_a^b \left\{ P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) \right\} dt.$$

覚え方

$$x \rightsquigarrow x(t), \quad dx \rightsquigarrow \frac{dx}{dt}(t) dt$$

$$y \rightsquigarrow y(t), \quad dy \rightsquigarrow \frac{dy}{dt}(t) dt$$

注：実は C のパラメータ $c(t)$ には依らない. “ C の図” で決まる.

ただし 曲線の **向きを逆にする** と符号が変わる.

$$\int_{-C} \mu = - \int_C \mu$$



実は, ここで用いた

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad \text{というもの}$$

こそが **1 次微分形式** である.

次に、

グリーンの定理

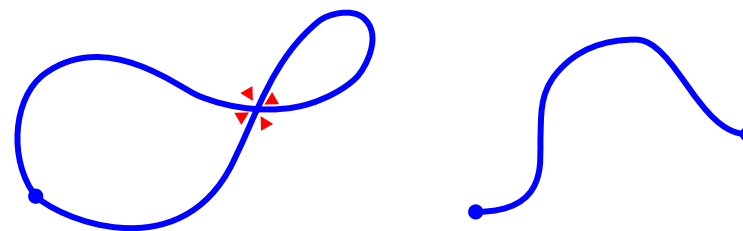
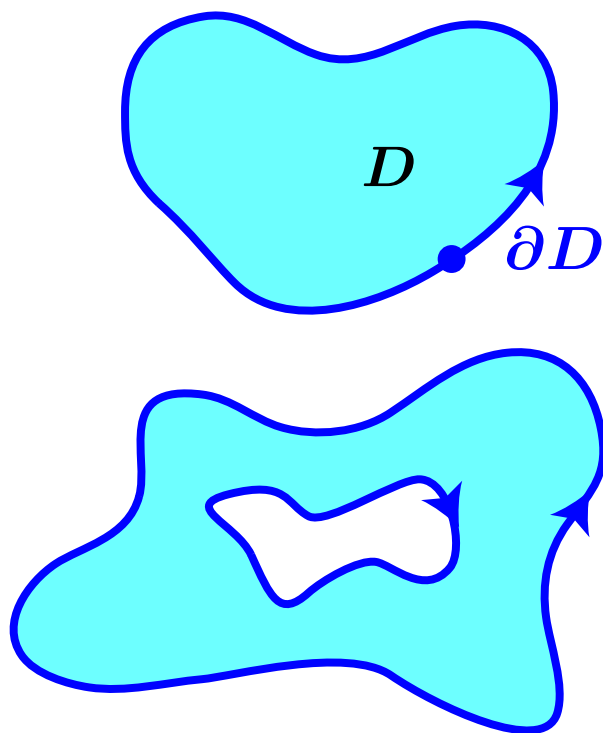
慣習 と 用語 の準備

(1) 領域 D の境界 (記号 ∂D) の向きは “右が外”

(2) 単純閉曲線

単純 : 自己交点をもたない.

閉曲線 : 終点が始点に一致すること. “始点に戻ってくる” 曲線



単純閉曲線でない

グリーンの定理

単純閉曲線 $C(= \partial D)$ に囲まれた領域 D について

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

グリーンの定理

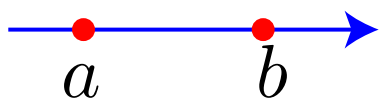
単純閉曲線 $C(= \partial D)$ に囲まれた領域 D について

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

解説（高校数学との比較）

$$[F(x)]_a^b = \int_a^b F'(x) dx$$

$$F(x) \xrightarrow{\text{微分}} F'(x)$$



←
境界



グリーンの定理

単純閉曲線 $C(= \partial D)$ に囲まれた領域 D について

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

解説（高校数学との比較）

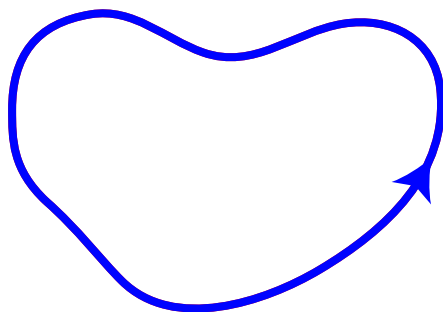
積分が 1 次元 高い Version

$$P dx + Q dy \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

正式名称は

外微分

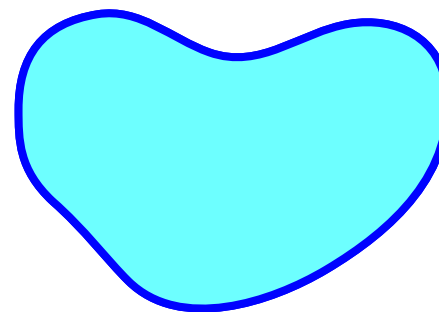
$$d(P dx + Q dy)$$



∂D

←
境界

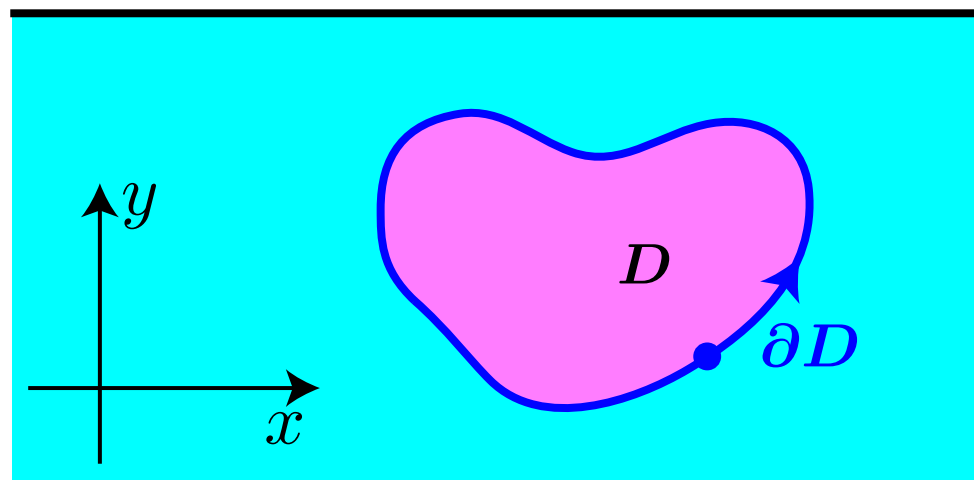
D



お話：線積分で面積が求まる

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} x \, dy &= \int_{\partial D} -y \, dx = \iint_D dx \, dy \\ &= [D \text{ の面積}]\end{aligned}$$

⇒ アルキメデスの（浮力の）原理



次に、

1 次微分形式 と 微分方程式

1 次微分形式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

..... 実は見たことがある.

$Pdx + Qdy = 0$ は, 微分方程式 $\star \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ のこと

解法 (復習)

[条件] $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ をみたすとき **完全型** という

完全型のとき, 関数 $F = F(x, y)$ で

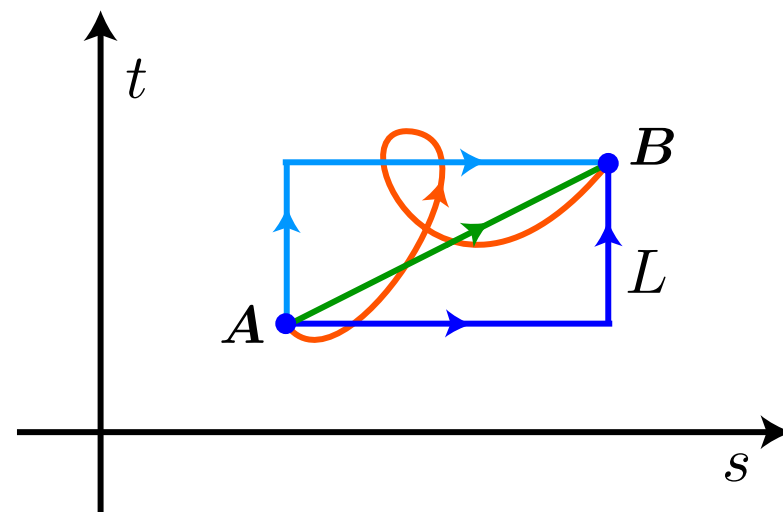
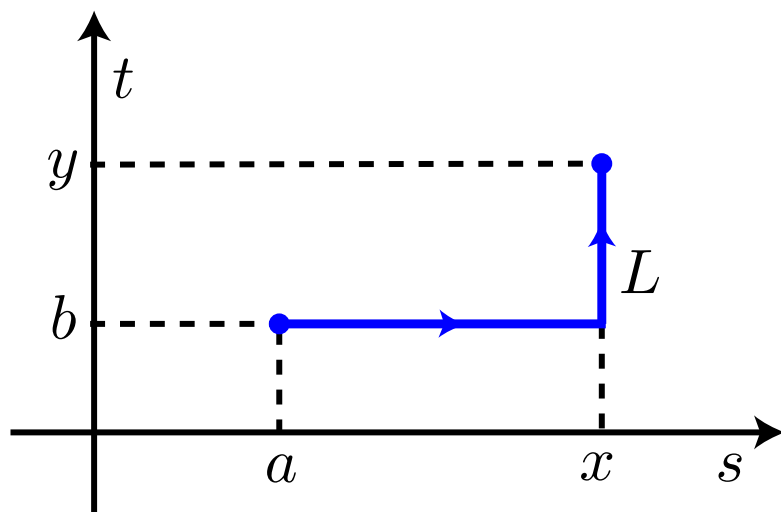
$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

を満たすもの が存在して

$\star$ の一般解は $F(x, y) = c$ (c は任意の定数)

その F の計算方法 (a, b) は任意の始点 $((0, 0)$ が便利)

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_a^x P(s, b) ds + \int_b^y Q(x, t) dt \\
 &= \int_L P dx + Q dy \quad L \text{ に沿う線積分}
 \end{aligned}$$

しかも **完全型** の $P dx + Q dy$ に対してこの線積分 $F(x, y) = \int_L P dx + Q dy$ は **経路 L に依らない**.**始点 A と終点 B のみで決まる**.

証明：

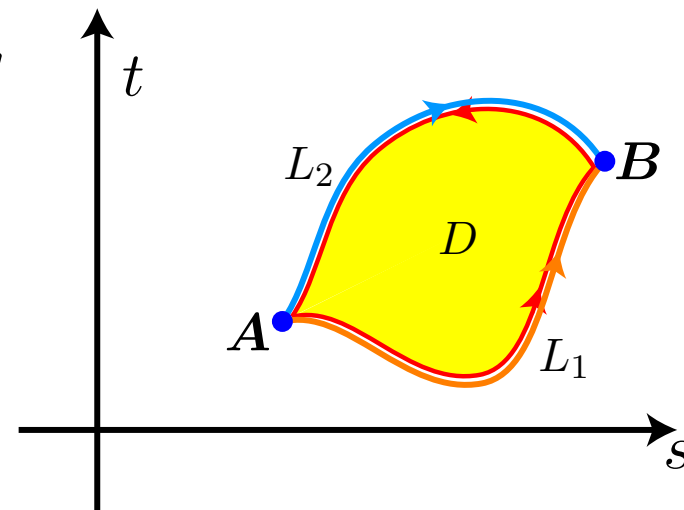
$$\int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{L_1} + \int_{-L_2} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{L_1 \cup -L_2} Pdx + Qdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

↑
グリーンの定理



ここで、**完全型** の条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ が効いた.

□

始点 A と終点 B のみで決まる 実は $F(x, y)$ で決まる.

$$\int_L P dx + Q dy = F(B) - F(A) \quad \text{「} F \text{ ポテンシャル」の差}$$

ここで予習：関数 F の外微分 dF とは, 1 次微分形式

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

のこと. F の条件から

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

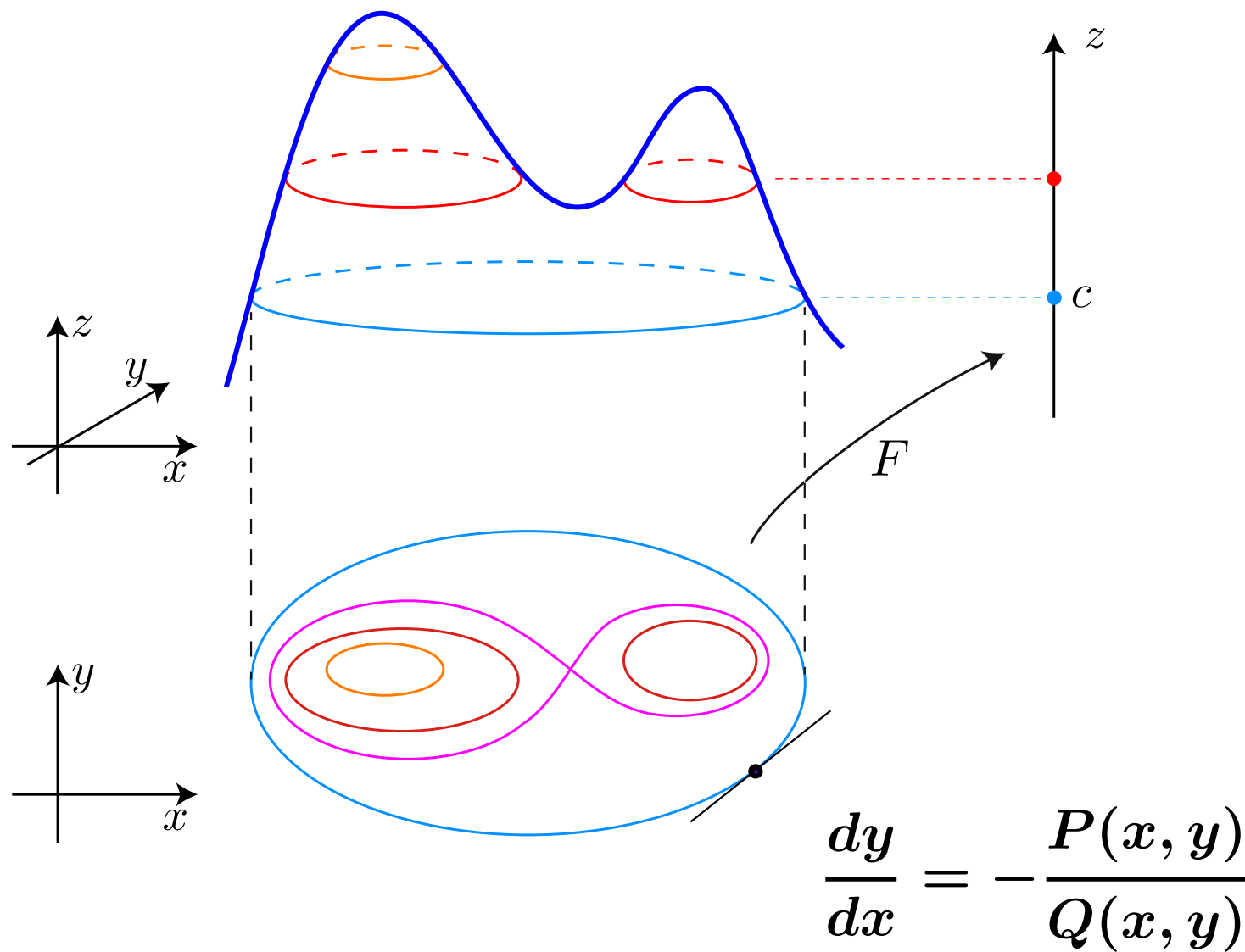
$$dF = P dx + Q dy$$

これを使うと

$$\int_L dF = F(B) - F(A)$$

「関数 F の外微分の線積分は . . . 」型

また, $Pdx + Qdy = 0$ の一般解 $F(x, y) = c$ は “ F の c -等位面”.



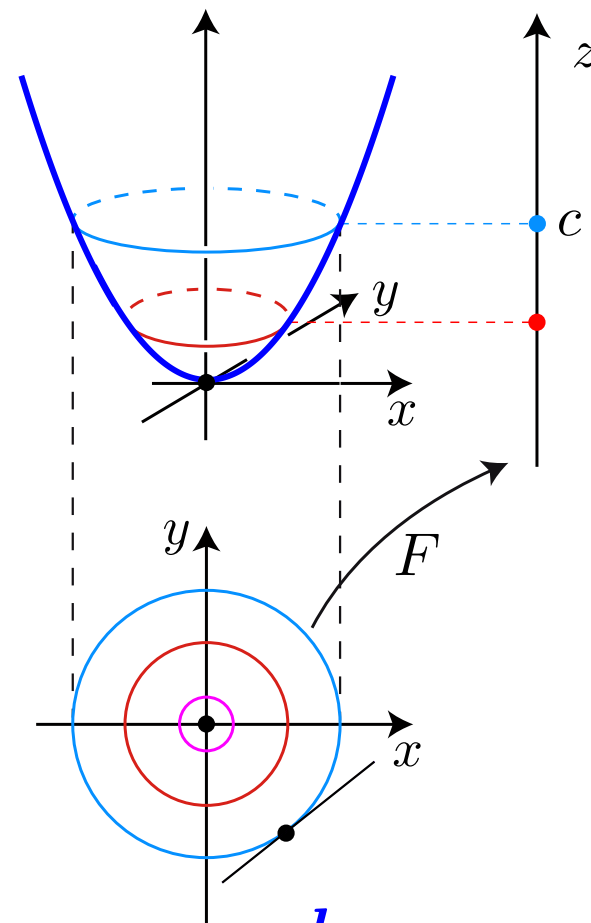
例 : $x dx + y dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{完全型}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x s ds + \int_0^y t dt \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

F の等位面 $F(x, y) = c$ は
同心円をなす.

$$P(x, y) = x, \quad Q(x, y) = y$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ここまで