

線形代数学第二 過去の間試験から (山田)

□2 線形空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を次の通りとする. 下の問いに答えよ.

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + y = z \\ x^2 = y^2 \end{array} \right\}$$

(1) V が次の条件「スカラー倍について閉じている」を満たすことを示せ.

$$\boldsymbol{v} \in V, k \in \mathbb{R} \text{ ならば } k\boldsymbol{v} \in V$$

(2) V が $\mathbb{R}^3$ の部分空間 (線形部分空間) であるかどうか判定せよ. その際, 前問 (1) で示したこと との関係を簡潔に説明すること.

解答例・解説 (山田)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + y = z \\ x^2 = y^2 \end{array} \right\}$$

(1) 解答例 (証明) V がスカラー倍で閉じていること.

(01) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in V, k \in \mathbb{R}$ とする.

(02) つまり $x + y = z$ かつ $x^2 = y^2$ とする.

(03) このとき $k\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}$ について

(04) (02) により $kx + ky = k(x + y) = kz$ かつ $(kx)^2 = k^2x^2 = k^2y^2 = (ky)^2$ が成り立つ.

(05) したがって $k\boldsymbol{v} \in V$ である.

主眼は次の2つ:

- ・ 仮定 $\boldsymbol{v} \in V$ から (02) の条件 が読み取れていること. そして
- ・ (02) を理由として (04) が成り立つこと.

(2) 解答例 (説明)

部分空間の定義は,

(a) スカラー倍について閉じていること **かつ** (b) 和について閉じていること.

問題の部分集合 V に関して, (a) が成り立つことは前問 (1) で調べた通りだが, 下記の通り (b) が成り立たない. 従って V は 部分空間ではない.

(b) が成り立たない例. 和について閉じていないこと.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V \quad \text{であるが} \quad \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \notin V$$

(第1の条件 $x + y = z$ は成り立っている ($2 + 0 = 2$) が, 第2の条件 $x^2 = y^2$ が成り立っていない ($2^2 \neq 0^2$) ので $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \notin V$.) V は和について閉じていない.

主眼: 和 と スカラー倍, 一方だけでは不十分.

(2) あまりよくない解答例 (b) が成り立たない例.

(01) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in V$ とする.

(02) つまり $x_1 + y_1 = z_1$ かつ $x_1^2 = y_1^2$, および $x_2 + y_2 = z_2$ かつ $x_2^2 = y_2^2$ とする.

(03) このとき $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$ について

(04) (02) により $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = z_1 + z_2$ が成り立つ.

(05) しかし $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ と $(y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2$ とを比較すると, (02) により $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ は得られるが, $x_1x_2 \neq y_1y_2$ の場合には $(x_1 + x_2)^2 = (y_1 + y_2)^2$ が成り立たない.

(06) したがって V は和について閉じていない.

コメント:「証明をしようとするときどこが破綻するか」の思考過程はこれで良い.
しかし証明としては, この思考の末に, $x_1x_2 \neq y_1y_2$ から生じる反例 ((b) が成り立たないことを示す具体例) を構成して 証明とする方が はるかに効率がよく効果的である.

次のような ((05) 部分) 解答例・文例は、数学の論理の厳密性から考えると不十分.

(05') (02) により $(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2 = \dots = 2(x_1x_2 - y_1y_2) \neq 0$ なので...

欠点の理由: $x_1x_2 - y_1y_2 = 0$ の場合も存在するから.

「 $\dots = 2(x_1x_2 - y_1y_2)$ となる. そのため $x_1x_2 - y_1y_2 \neq 0$ の場合には ... 成り立たない.」 とすべき.

「 $\neq$ 」は「等しくない」意味に使うのが正しく, 「 $=$ とは限らない」の意味で使わないほうが良い.

教科書の例:「行列では $AB = BA$ が成り立つとは限らない (p.24)」