

左不変ベクトル場（行列群の場合）（by 山田）

一般線形群 $GL(n; \mathbf{R}) := \{ A \in \text{Mat}(n, n; \mathbf{R}) \mid \det A \neq 0 \}$ の場合を考える．その部分群（ $SL(n; \mathbf{R}), SO(n)$ など）でも計算自体は同じ．複素数の場合も同様．

準備事項

- リー群 $GL(n; \mathbf{R})$ は次のようにして $\mathbf{R}^{n \times n}$ 内の多様体 (図形) と見なされた．

$$\begin{aligned} GL(n; \mathbf{R}) &= \{ A \in M(n, n; \mathbf{R}) \mid \det A \neq 0 \} \\ &\subset M(n, n; \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \middle| \text{各 } x_{ij} \in \mathbf{R} \right\} = \mathbf{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

- $GL(n; \mathbf{R})$ の単位元 I (単位行列) での接空間 $T_I GL(n; \mathbf{R})$ の元, つまり I での接ベクトルの成分も次のように表す．“ I での” を表す添字 “ $|_I$ ” は省略する．

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

2重添字を使うので注意．

さて, リー群 G では, 単位元 e での1本の接ベクトル $\vec{v}$ が G 全体でのベクトル場「左不変ベクトル場」を定めるのだった．そのベクトル場の記号も同じ記号 $\vec{v}$ で表すことにする．

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{単位元 } e \text{ での} \\ \text{1本の接ベクトル } \vec{v} \end{array}} \implies \boxed{\begin{array}{c} G \text{ 全体での} \\ \text{ベクトル場 } \vec{v} \end{array}}$$

事実1. $GL(n; \mathbf{R})$ の場合, I での接ベクトル $\vec{a}$ が定めるベクトル場の, 点 A ($\in GL(n; \mathbf{R})$) でのベクトルの成分は $A\vec{a}$ となる． $\square$

2つのベクトル場 $\vec{X}, \vec{Y}$ について, 演算「ブラケット (括弧積) : $[\vec{X}, \vec{Y}]$ 」が存在した．

事実2. $GL(n; \mathbf{R})$ の場合, I での2つの接ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が定めるベクトル場の, ブラケット $[\vec{a}, \vec{b}]$ は, 次の成分計算で得られる I での接ベクトル $[\vec{a}, \vec{b}]$ が定めるベクトル場となる．

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \vec{b} - \vec{b} \vec{a}.$$

$\square$

こうして, リー群 G の単位元 e での接空間 $T_e G$ (記号 $\mathfrak{g}$) は「リー環」or「リー代数」と呼ばれる豊富な構造をもつのである．