

群論の基礎事項 (by 山田)

部分群・共役・剰余類・正規部分群

以下, G, H は群であり, その単位元を $1_G, 1_H$ で表すとする.

1 部分群

定義 1-1 群 G の部分集合 H が, G の演算に関して群になるとき, つまり

$$(1) a, b \in H \Rightarrow ab \in H.$$

$$(2) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H.$$

のとき, H は G の部分群といわれる. 上記の条件から $1_G \in H$ となる.

2 共役

定義 2-1 群 G の元 a, p に関して,

$p^{-1}ap$ を「 a の p による共役」という.

また, 2つの元 a, b が, 「 b が a の “ある元 p による共役”」の関係にあることを単に「 a と b は共役 ($a \sim b$)」という.

性質 2-2

・「共役」の関係は「同値関係」である. つまり, 次の3法則が成り立つ.

$$(\text{反射律}) a \sim a. \quad (\text{対称律}) a \sim b \Rightarrow b \sim a.$$

$$(\text{推移律}) a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

$$\cdot (p^{-1}ap)(p^{-1}bp) = p^{-1}(ab)p$$

$$\cdot (p^{-1}ap)^n = p^{-1}a^n p \quad \text{さらに} \quad (p^{-1}ap)^{-1} = p^{-1}a^{-1}p$$

理由: 左辺 = $p^{-1}ap \cdot p^{-1}ap \cdots p^{-1}ap$ で隣り合う $p \cdot p^{-1}$ が皆消える.

3 剰余類 S を群 G の部分群 (または部分集合) とする.

定義 3-1 「 G の S による 右剰余類」(左剰余群 も同様) とは,

$$aS := \{ ax \mid x \in S \} \quad (a \in G) \text{ の形の部分集合}$$

のこと. G はいくつかの S による 右剰余類達の和集合となるが, 「 G の S による 右剰余類の集合, 左剰余類の集合」をそれぞれ $G/S, S \backslash G$ と表す. G の元の個数 (位数: $\#G$) が有限のとき, 次の公式が成り立つ.

$$\#(G/S) = \frac{\#G}{\#S}$$

ここで, $\#X$ は X の元の個数を表すとする.

例 3-2 位数 6 の正 2 面体群 (正 3 角形の群)

$$\begin{aligned} D_6 &:= \langle x, r \mid x^3 = r^2 = 1, rx = x^{-1}r \rangle \\ &= \left\{ \begin{matrix} 1, & x, & x^2, \\ r, & xr, & x^2r \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$R = \{1, r\}$ とすると, $D_6/R = \{R, xR, x^2R\}$, $R \setminus D_6 = \{R, Rx, Rx^2\}$.

$$\begin{array}{ll} R &= \{1, r\} & R &= \{1, r\} \\ xR &= \{x, xr\} & Rx &= \{x, rx\} = \{x, x^2r\} \\ x^2R &= \{x^2, x^2r\} & Rx^2 &= \{x^2, rx^2\} = \{x, xr\} \end{array}$$

※ この例では $xR \neq Rx$ (集合として異なる) であることに注意.

4 正規部分群

定義 4-1 G の部分群 H が次の条件 (1) をみたすとき, 正規部分群であるという.

$$(1) \quad \forall p \in G, \quad Hp = pH. \quad (\text{集合として})$$

定理 4-2 この条件は, 次の条件 (2), さらに (2)' と同じ条件である.

$$(2) \quad \forall p \in G, \quad p^{-1}Hp \subset H. \quad (2)' \quad \forall p \in G, \quad p^{-1}Hp = H.$$

条件 (2) は言い換えると,

$$[2] \quad \forall p \in G, \quad \forall h \in H, \quad \exists h' \in H \quad \text{s.t.} \quad p^{-1}hp = h'.$$

証明 (条件 (2) と (2)' の同値性):

(2)' $\Rightarrow$ (2) は明らか. (2) $\Rightarrow$ (2)' を示す. (2) つまり [2] を仮定. $p^{-1}hp = h'$ は $h = ph'p^{-1}$ と同値だから, 「 $\forall p \in G, \quad H \subset pHp^{-1}$ 」を得る. 各 p について, 逆元 p^{-1} に対してこの条件を考えることにより 「 $\forall p \in G, \quad H \subset p^{-1}Hp$ 」も得られる. 「 $p^{-1}Hp \subset H$ 」と 「 $H \subset p^{-1}Hp$ 」から 「 $p^{-1}Hp = H$ 」が得られるから (2)' を得る. $\square$

証明 (条件 (1) と (2) の同値性):

まず (1) $\Rightarrow$ (2) を示す. (1) から得られる 「 $\forall p \in G, \quad Hp \subset pH$ 」を言い換えると

$$\forall p \in G, \quad \forall h \in H, \quad \exists h' \in H \quad \text{s.t.} \quad hp = ph'.$$

$hp = ph'$ は $p^{-1}hp = h'$ と同値だから, 「 $\forall p \in G, \quad p^{-1}Hp \subset H$ 」つまり (2) を得る. 次に, (2)' $\Rightarrow$ (1) を示す. (2)' から得られる 「 $\forall p \in G, \quad p^{-1}Hp \subset H$ 」を言い換えると

$$\forall p \in G, \quad \forall h \in H, \quad \exists h' \in H \quad \text{s.t.} \quad p^{-1}hp = h'.$$

であるが, $p^{-1}hp = h'$ は $hp = ph'$ と同値だから, 「 $\forall p \in G, \quad Hp \subset pH$ 」を得る. 逆向きの包含関係も同様にして得られる. $\square$

定理 4-3 H が G の正規部分群ならば, G/H は G の積と両立して 群となる.

つまり, 剰余類 aH に属す元 (ah_1) と bH に属す元 (bh_2) の積は abH に属す.

$$aH \cdot bH = abH \quad \text{in } G/H$$

証明: $ah_1 \cdot bh_2 = a(h_1b)h_2 = a(bh_3)h_2 = ab(h_3h_2) \in abH$.

2つめの等号のところで, $Hb = bH$ から保証される 「 $\exists h_3 \in H \quad \text{s.t.} \quad h_1b = bh_3$ 」 を利用した. $\square$

5 群の準同型・同型

定義 5-1 G から H への写像 $f: G \rightarrow H$ が次の条件をみたすとき, f は**準同型**である, という.

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad f(g_1g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) \quad \text{in } H$$

また, 全単射である準同型を**同型**という.

用語と性質 $f(1_G) = 1_H$ となる. ($g_1 = g_2 = 1_G$ の場合を考えよ)

$$\mathbf{f \text{ の 像 }} \quad f(G) := \{f(g) \in H \mid g \in G\} \quad \subset H$$

$$\mathbf{f \text{ の 核 }} \quad f^{-1}(1_H) := \{g \in G \mid f(g) = 1_H\} \quad \subset G$$

$f(G)$ は H の部分群, $f^{-1}(1_H)$ は G の 正規 部分群となる.

群ならではの 写像 $g \in G$ とする.

[g による**左移動**]

$$\begin{aligned} \ell_g : \quad G &\rightarrow G, \\ x &\mapsto gx. \end{aligned}$$

この写像は, 全単射である (実際, 逆写像が存在する: $(\ell_g)^{-1} = \ell_{g^{-1}}$) が, 準同型ではない.

[g による**共役**]

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g : \quad G &\rightarrow G, \\ x &\mapsto g^{-1}xg. \end{aligned}$$

この写像は 同型 である. 実際,

$$\text{Ad}_g(x_1x_2) = g^{-1}x_1x_2g = g^{-1}x_1gg^{-1}x_2g = \text{Ad}_g(x_1) \cdot \text{Ad}_g(x_2)$$

となるから準同型であって, なおかつ全単射である (逆写像: $(\text{Ad}_g)^{-1} = \text{Ad}_{g^{-1}}$).