

写像の微分 (by 山田)

問 次の写像を f とする.

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (X, Y, Z) = (x, xy, y^2). \end{aligned}$$

$\mathbf{R}^2$ 内に 9 つの点 $\left\{ \begin{array}{lll} \text{あ}(-1, 1), & \text{い}(0, 1), & \text{う}(1, 1), \\ \text{か}(-1, 0), & \text{き}(0, 0), & \text{く}(1, 0), \\ \text{さ}(-1, -1), & \text{し}(0, -1), & \text{す}(1, -1), \end{array} \right\}$ をとる.

- (1) それぞれの点の f による像を求め, 図示せよ.
- (2) $\mathbf{R}^2$ の次の 3 本の横線の f による像を図示せよ.

$$\begin{array}{ccc} \text{“あいう”} & \text{“かきく”} & \text{“さしす”} \\ y = 1 & y = 0 & y = -1 \end{array}$$

- (3) $\mathbf{R}^2$ の次の 3 本の縦線の f による像を図示せよ.

$$\begin{array}{ccc} \text{“あかさ”} & \text{“いきし”} & \text{“うくす”} \\ x = -1 & x = 0 & x = 1 \end{array}$$

- (4) これまでの結果を参考に, f の像の概形を図示せよ.

● いよいよ この写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ について「 f の P での微分」を考える:

$$df|_P : T_P \mathbf{R}^2 \rightarrow T_{f(P)} \mathbf{R}^3.$$

- (5) $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\frac{\partial}{\partial x}|_P$ および $\frac{\partial}{\partial y}|_P$ の $df|_P$ による像 (それは $\mathbf{R}^3$ のベクトルで 始点は $f(P)$.)

$$df|_P\left(\frac{\partial}{\partial x}|_P\right), \quad df|_P\left(\frac{\partial}{\partial y}|_P\right) \in T_{f(P)} \mathbf{R}^3$$

を, $P = \text{い}, \text{う}, \text{き}, \text{く}$ の 4 点についてそれぞれ計算し, 図示せよ.