

行列群 から Lie 群へ (by 山田)

役に立つ行列群の名称

準備事項

- 行列式の準同型性質: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- tA は (主に実数行列で) A の転置行列を表す. メモ ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
- $*A$ は (主に複素行列で) A の転置共役行列 $\bar{A}$ を表す.
- 線形 = Linear, 一般 = General, 特殊 = Special (行列式が 1), 直交 = Orthogonal, ユニタリ = Unitary (複素での直交).
- $\mathbf{K}$ と書いたら, 一般の体 (field) を表わす. 実際的には 実数 $\mathbf{R}$ か 複素数 $\mathbf{C}$.
- $\text{Mat}(n, m; \mathbf{R})$ で (n, m) 実数行列の集合, I は単位行列, o は零行列.

行列群

$$GL(n; \mathbf{K}) := \{ A \in \text{Mat}(n, n; \mathbf{K}) \mid \det A \neq 0 \} \quad (\text{一般線形行列群})$$

$$SL(n; \mathbf{K}) := \{ A \in \text{Mat}(n, n; \mathbf{K}) \mid \det A = 1 \} \quad (\text{特殊線形行列群})$$

$$O(n) := \{ A \in GL(n; \mathbf{R}) \mid A {}^tA = {}^tAA = I \} \quad (\text{直交行列群})$$

$$SO(n) := \{ A \in SL(n; \mathbf{R}) \mid A {}^tA = {}^tAA = I \} \quad (\text{特殊直交行列群})$$

$$U(n) := \{ A \in GL(n; \mathbf{C}) \mid A {}^*A = {}^*AA = I \} \quad (\text{ユニタリ群})$$

$$SU(n) := \{ A \in SL(n; \mathbf{C}) \mid A {}^*A = {}^*AA = I \} \quad (\text{特殊ユニタリ群})$$

注: 正方行列 A, B に関して $AB = I \Leftrightarrow B = A^{-1} \Leftrightarrow BA = I$ だから, $A {}^tA = I$ と ${}^tAA = I$ のうち一方が成り立てば他方は自動的に成り立つ. $A {}^*A = I$ と ${}^*AA = I$ についても同様.

具体的表示:

$$\bullet SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R} \right\}, \quad (\text{平面の } \theta\text{-回転})$$

$$\bullet O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbf{R} \right\},$$

右の行列は, 直線 $y = (\tan \varphi)x$ に関する対称変換で, 行列式は -1 .

$$\bullet U(1) = \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \} = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbf{R} \}. \quad (\text{単位円周})$$

$$\bullet SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbf{C}, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}. \quad (\text{3次元球面})$$

ここまで挙げた例は、総称「行列群」。通常の行列の積に関してみな群をなす。つまり、次の各性質を満たす。

- G は積に関して閉じている： $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in G$.
- G は結合法則をみたす： $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$.
- 積の単位元（単位行列 I ）が G に属す： $I \in G$.
- G の任意の元の逆元が G に属す： $\forall g, g^{-1} \in G$.

Lie 群へ これらの行列群は“Lie 群”の典型的な例である。一般に、Lie 群 G には対応する Lie 環 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ から G への“exp 写像”が存在する。実は『図形としての G の、点 I （単位元）における接平面』で、exp 写像は $\mathfrak{g}$ の原点 o の近くでは全単射である（難）。

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ a &\mapsto \exp(a). \end{aligned}$$

行列群の場合は、それは行列の exp そのものである。

$$\exp(a) = I + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n + \cdots$$

exp に関する公式 $\det(\exp(a)) = e^{\text{tr}(a)}$, $\exp(P^{-1}aP) = P^{-1}\exp(a)P$ などを出してほしい。次のリストでは、例えば $sl(n; \mathbf{R})$ は Lie 群 $SL(n; \mathbf{R})$ に対応する Lie 環、というわけである。また $o(n) = so(n)$ なので $o(n)$ は省略。

$$gl(n; \mathbf{K}) := \text{Mat}(n, n; \mathbf{K}).$$

$$sl(n; \mathbf{K}) := \{a \in \text{Mat}(n, n; \mathbf{K}) \mid \text{tr}(a) = 0\}.$$

$$so(n) := \{a \in \text{Mat}(n, n; \mathbf{R}) \mid {}^t a + a = o\} \quad (\text{交代行列})$$

$$u(n) := \{a \in \text{Mat}(n, n; \mathbf{C}) \mid {}^*a + a = o\} \quad (\text{反エルミート行列})$$

$$su(n) := \{a \in \text{Mat}(n, n; \mathbf{C}) \mid {}^*a + a = o, \text{tr}(a) = 0\}.$$

$$\text{メモ} : so(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R} \right\}, u(1) = \{i\theta \mid \theta \in \mathbf{R}\} = \{\text{純虚数}\}.$$

$$su(2) = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbf{R}} \quad (\text{実 3 次元の線形空間})$$

次元は Lie 群からよりも Lie 環からの方が計算しやすい。例えば $u(n)$ の場合、条件 ${}^*a + a = o$ から、対角成分は純虚数で、非対角成分（複素数）は上三角成分（ $\frac{(n-1)n}{2}$ 個）を決めれば下三角成分が自動的に決まることから、実数で n^2 次元。よって $U(n)$ の次元も n^2 。

実は、 $u(n)$ は $gl(n; \mathbf{C})$ （複素数で n^2 次元）の“Lie 環としての実部”であり、 $U(n)$ は $GL(n; \mathbf{C})$ の“極大コンパクト部分群”である。

直交行列群 $O(n)$ の構造

直交行列の定義を、以下では $O(n) := \{A \in GL(n; \mathbf{R}) \mid {}^tAA = I\}$ とする
($A {}^tA = I$ または ${}^tAA = I$ のどちらか一方がみたされれば他方は自動的にみたされる) .

次の正方行列を (行列の大きさに関わらず) R と書くことにする.

$$R := \begin{pmatrix} -1 & {}^t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列 R は「反転行列」などと呼ばれる. それは縦ベクトルに左からかけたときの効果が “ $x_2x_3 \cdots x_n$ -超平面” ($x_1 = 0$) に関する反転 (鏡映) の変換だからである.

$$\begin{pmatrix} -1 & {}^t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

反転行列 R の性質として $R^2 = I$, ${}^tR = R$, $\det R = -1$.

定理： 直交行列群 $O(n)$ は, 集合として, 次の 2 つの成分に分かれる.

$$O(n) := SO(n) \cup RSO(n), \quad RSO(n) := \{RA \mid A \in SO(n)\}$$

- ・特殊直交行列群 $SO(n)$ (行列式が 1) .
- ・ $SO(n)$ に属す行列に左から R をかけた行列 (行列式が -1) の集合.

(証明) 定義により, $O(n)$ に属す行列 A は

$${}^tAA = I \tag{1}$$

をみたす. この式の両辺の行列式をとることにより,

$$1 = \det(I) = \det({}^tAA) = \det({}^tA) \cdot \det(A) = \det(A)^2 \tag{2}$$

したがって $\det(A) = \pm 1$. 式 (2) の変形では, 行列式の性質 $\det({}^tA) = \det(A)$ と 準同型性 を利用した. さて,

- ・ $\det(A) = 1$ であれば, そのことと 式 (1) から A は $SO(n)$ に属す.
- ・ $\det(A) = -1$ であれば, R をかけたもの RA については, 再び準同型性から $\det(RA) = \det(R)\det(A) = (-1) \cdot (-1) = 1$ であり, しかも ${}^tAA = I$ と $R^2 = I$ から

$${}^t(RA)(RA) = {}^tA {}^tRRA = {}^tARRA = {}^tAIA = {}^tAA = I.$$

となり, (RA) は $SO(n)$ に属す.

さらに $A = A' \Leftrightarrow RA = RA'$ もわかる. (両辺に R をかければよい)
このことは, $SO(n)$ と $RSO(n)$ の間に 1 対 1 の対応があることを意味する. $\square$

事実: $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbf{R} \right\}$

証明: $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$ とすると, $\det({}^tA) = \det A$ と行列式の準同形性質から $(\det A)^2 = 1$ よって $\det A = ad - bc = \pm 1$ および,

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

成分を書いて計算すると,

$$\begin{array}{ll} (1,1) & a^2 + c^2 = 1 \\ (1,2) & ab + cd = 0 \\ (2,1) & ab + cd = 0 \\ (2,2) & b^2 + d^2 = 1 \end{array}$$

ここで, (1,1) 式と (2,2) 式は, 点 (a, c) と点 (b, d) とが共に, 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にあることを意味する. 単位円上の点は角度で表されるから,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

となる θ と φ が存在する.

次に, これらを (1,2) 式 および $ad - bc = \pm 1$ に代入すると

$$0 = ab + cd = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \cos(\varphi - \theta),$$

$$\pm 1 = ad - bc = \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi = \sin(\varphi - \theta).$$

これらから $\varphi - \theta = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数), つまり $\varphi = \theta \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. よって

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \\ \sin(\theta \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる. ここまでの議論で, 符号は全て同順. 符号が $+$ なら, 行列は 平面の回転行列であり, $SO(2)$ に属す. □

空間の回転行列: $SO(3)$ は $\mathbf{R}^3$ に作用する. $SO(3)$ に属す任意の行列は, 次の意味で回転行列であることが知られている.

原点を通る向きのついた直線 ℓ を軸に右ねじりに θ 回転.

ℓ の向きを逆 ($-\ell$) にして角度 θ を $-\theta$ にとりかえても同じ効果であることに注意.

実は, 4 元数体 $\mathbf{H}$ の単位球面 (S^3 と書く) から $SO(3) \curvearrowright 2$ 対 1 での対応が存在する.

$$\begin{array}{ll} S^3 & \rightarrow SO(3) \\ q & \mapsto (\text{Ad}_q : v \mapsto qvq^{-1}). \end{array}$$

ここで v は $\text{Im}\mathbf{H}$ ($\cong \mathbf{R}^3$) のベクトル.