

多様体 とは (山田)

まず典型的な具体例を挙げて、その後で説明に続ける

例：n 次元球面 (記号 S^n : Sphere の S)

$$S^n := \left\{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}.$$

ここで $\|\mathbf{x}\| = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. つまり, S^n は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内で原点からの距離が 1 の点の集合. S^1 は円周, S^2 は (普通の) 球面である.

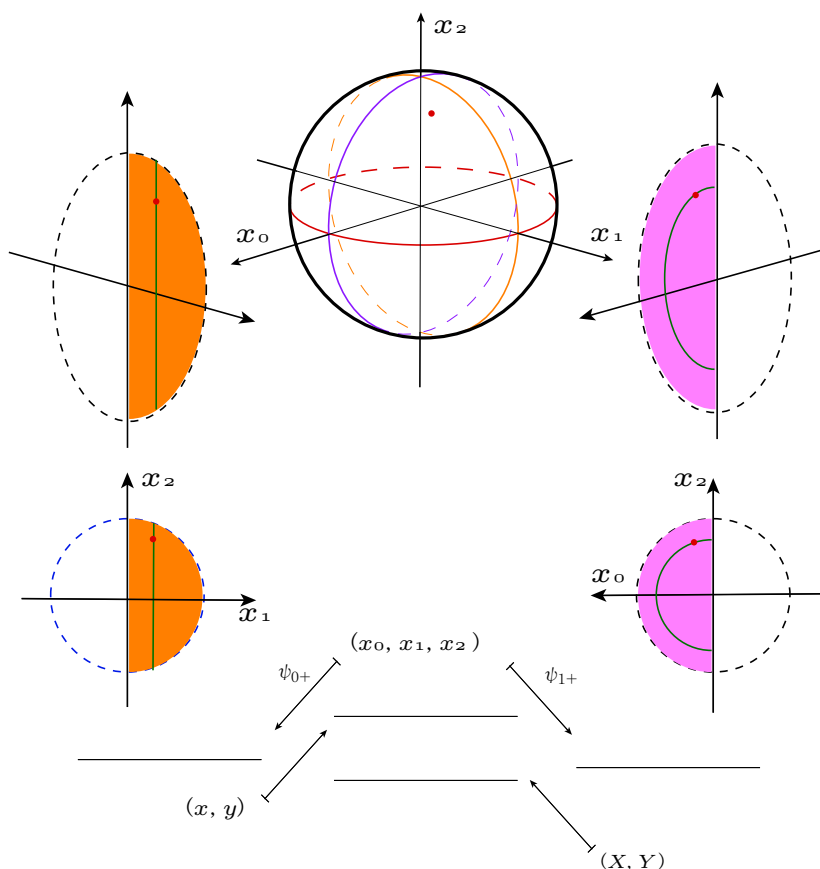
その座標の例： $\{(V_{i\varepsilon}, \varphi_{i\varepsilon})\}_{i=0,1,\dots,n, \varepsilon=\pm 1}$

$$S^n \text{ の一部 } V_{i\varepsilon} := \{ \mathbf{x} \in S^n \mid \varepsilon x_i > 0 \}$$

$$\mathbf{R}^n \text{ の一部 } U_{i\varepsilon} := \{ (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < 1 \}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i\varepsilon} : & V_{i\varepsilon} & \rightarrow U_{i\varepsilon} \\ & (x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) & \mapsto (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \end{array}$$

ここで $\hat{x}_i$ の ^ は “取り除く” 意味.



この例の場合の座標変換は,

$$\varphi_{1+} \circ \varphi_{0+}^{-1} : (x, y) \mapsto (X, Y) =$$

$$\varphi_{0+} \circ \varphi_{1+}^{-1} : (X, Y) \mapsto (x, y) =$$

定義 (準備) $f: X \rightarrow Y$ が 同相写像 とは,

(1) f が全単射, (2) f が連続写像, (3) f^{-1} が連続写像

の3つが成り立つこと.

X と Y の間に同相写像が存在するとき, X と Y は 同相 ($X \approx Y$) と表す. これは, “同じ図形 (変形した程度)” という意味.

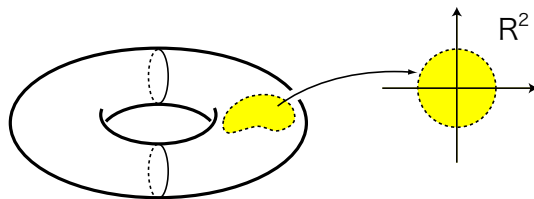
定義: n 次元 位相多様体 図形 M が n 次元位相多様体 であるとは,

M の任意の点 p に対して, p を含む M の開集合 V で

条件: V は $\mathbf{R}^n$ の開集合 (U とする) と同相

をみたすものが存在すること.

つまり, “ M のどの点でも, (全体を見ず) その周辺だけを見れば $\mathbf{R}^n$ と同じ” であるような図形, ということ. 2次元多様体は “曲面” のこと.



定義 (準備) 上の定義で, V と V' から U への同相写像 (φ とする) の組 (V, φ) を 座標 という. M 上で2つの座標 V, V' が重なっているとき, その部分で2通りの座標表示 φ, φ' の間に 座標変換 が生じる.

定義: n 次元 可微分多様体 (滑らかな多様体)

n 次元位相多様体 M の 座標による被覆 S が

条件: S 内の任意の座標変換が 無限回微分可能 であること

をみたすとき, 組 (M, S) (または, 省略して単に M を) 可微分多様体 という.

考察: M, N を それぞれ m, n 次元の滑らかな多様体 とする.

M から N への写像 $f: M \rightarrow N$ ($N = \mathbf{R}$ の場合は関数) の 微分可能性 や 特異点 (極値など) は, (M の各点で, その点を含む) 座標を介して考察することができる. 多様体とは, “微積分が適用できる図形” のこと, と言える.

事実: M, N を それぞれ m, n 次元の滑らかな多様体 とするとき,

$$\text{積 } M \times N := \{ (x, y) \mid x \in M, y \in N \}$$

は, 自然に $(m+n)$ 次元の多様体となる.

多様体 の接ベクトル (山田)

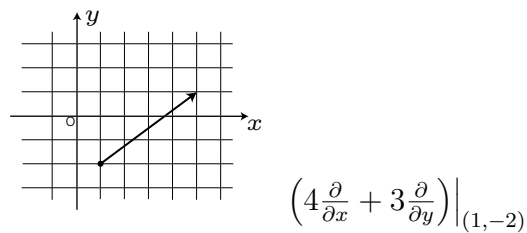
幾何学 (多様体論) では, ベクトルは勝手に平行移動してはいけない. 始点の異なるベクトルは, 成分が同じでも区別する. ベクトルの和 は始点の同じベクトルに対してだけ定義される.

$\mathbf{R}^n$ 内 のベクトルの表示

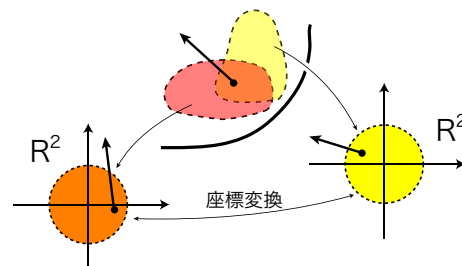
始点が $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$, 成分が $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ のベクトルを次のように表す.

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \Big|_{(p_1, p_2, \dots, p_n)} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Big|_P$$

例:



M の座標を介した接ベクトルの表示 : M を n 次元の滑らかな多様体とすると, M の (接) ベクトルは, 始点を含む座標を介して $\mathbf{R}^n$ のベクトルとして上記のように表示する. ただし, この表示は座標が重なっている部分では使用した座標によって異なる.



2つの座標が重なっていれば, 2通りの表示がある. しかし, その2通りの座標の間には座標変換があるので, それによってベクトルの表示も変換される.

ベクトルの座標変換: 座標変換を $\Phi: y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) とすると,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{(p_1, p_2, \dots, p_n)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p_1, p_2, \dots, p_n) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)}$$

この公式は, 微積分で学んだ “合成関数の微分の公式” に由来している. それは「幾何: 始点 P , 成分 $\mathbf{v}$ のベクトル」を「操作: P での $\mathbf{v}$ 方向の偏微分」と対応させることに基づく.

定義・記号

$T_P M$: 「 M の P における接空間」 P を始点とする M の接ベクトルの全体.

これは n 次元の線形空間である : 和 と スカラー倍 が可能 (復習!).

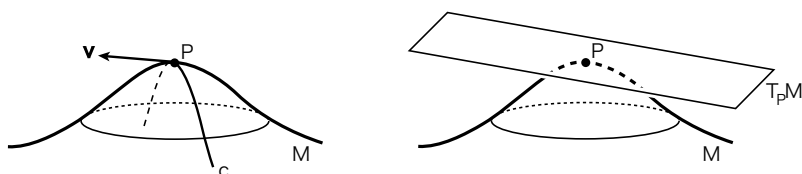
TM : M の接ベクトル全体 ($= \cup_{P \in M} T_P M$)

$\mathbf{R}^N$ 内に実現された多様体の接ベクトル

以下, n 次元の滑らかな多様体 M が, ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ の中で実現されている ($M \subset \mathbf{R}^N$) とする. M 内の曲線 $c(t)$ が時刻 $t=0$ で点 P を通ったとすると, その $t=0$ での速度ベクトル $\dot{c}(0) = \frac{dc}{dt}|_{t=0}$ は, 始点が P で, M に接しているはずである. このアイデアをもとに, $M \subset \mathbf{R}^N$ の場合の M の接ベクトル を, 次のようにして定める : M 上の点 P を始点とする $\mathbf{R}^N$ のベクトル $\mathbf{v}$ は,

M 内の 曲線 c で $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$ がとなるもの が存在するとき,

M に接するという. この意味の場合でも, 接空間には同じ記号 $T_P M$ を用いる.



M を含んでいる $\mathbf{R}^N$ の座標 で表示したベクトルは, M の 多様体としての座標 を介して $\mathbf{R}^n$ 内で表示したものと混乱しやすいので注意が必要である.

多様体の間の写像の微分 :

M, N を それぞれ m, n 次元の滑らかな多様体 とする. $f : M \rightarrow N$ を微分可能な写像とする. このとき, 次の線形写像 $df|_P$ を 「 f の P における微分」 という.

$$\begin{aligned} df|_P : \quad T_P M &\rightarrow T_{f(P)} N \\ \mathbf{v} = \dot{c}(0) &\mapsto \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0} \end{aligned}$$

$f(c(t))$ は N 内の曲線で, $t=0$ のとき $f(c(0)) = f(P)$ となるため, 左辺は確かに $f(P)$ を始点とする N の接ベクトル, つまり $T_{f(P)} N$ の元 を定めている.

$df|_P$ は, 写像 f の点 P での近似 (接線の高次元化) なのである.

例 : $M = \mathbf{R}^m, N = \mathbf{R}^n$ の場合, 写像を $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), \dots, y_n(\mathbf{x}))$ とすると,

$$df|_P \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P \right) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(P) \cdot \frac{\partial}{\partial y_\ell} \Big|_{f(P)} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$