どうして $\epsilon-\delta$ 論法？　(by 山田)

数学での「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」の 定義 は次の通り：

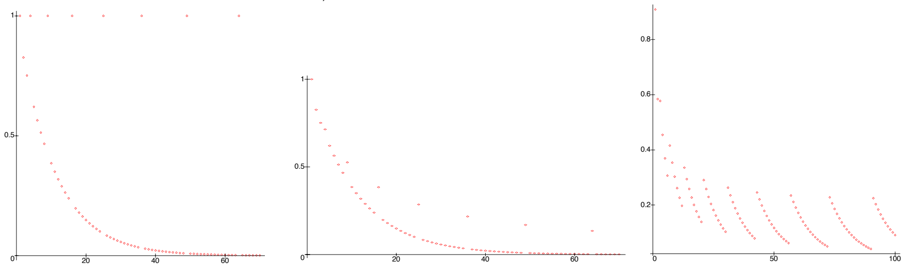
$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbf{N} \text{ s.t. } \forall n\in\mathbf{N}, \text{“}n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\epsilon\text{”}$$

安易に「n を大きくすると a_n は α に近づく」ではダメだ．意味合いを理解するだけならこれでもいいが, これでは「近づく」のところが “いいかげん” で論理の厳密性が失われている．どんな数列に対しても $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なのかそうでないのかを判断できる明確な基準を作る必要がある．

次の 3 種類の数列のそれぞれについて, あなたは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と判断しますか？

$$a_n = \begin{cases} 1 & n\text{ が平方数のとき} \\ \frac{1}{2^n} & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n\text{ が平方数のとき} \\ \frac{1}{2^n} & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad a_n = \text{ 省略（図）}.$$

横軸に n, 縦軸に a_n をプロットしたグラフ



$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ というと気分的には, 一方的に絶対値が減って 0 に近づいていく数列をイメージする．しかし, いろいろな例を想定してみると, 「多少の例外がときどき出る数列も収束ということにしていいかな？」とか, 「例外の度合い（値／回数）が減っていく場合ならいいかな？ 」とか感じてこないだろうか？

$\boxed{\text{困難}}$

(1) （無限）数列は，数が 無限に 並んでいる．

「最後」の項は存在しない．でありながら, 極限は最後の方でどうなるのかを扱っている．

(2) 数列は，数の “動き” である．(時刻 n での数直線上の位置が a_n である動点と考える）

「近い」という言葉は，2 者の比較に使う場合は論理的である．例：「$0<0.1<1$（0.1 と 1 とでは 0.1 の方が 0 に近い)」．問題なのは「近づく」という言葉の中にある “動き” の部分ではないか.

$\boxed{\text{対処法}}$

(1) 無限個の何かを扱うとき, 「全ての」を使って一括で処理をするのが便利.

(2) 「近づく」という言葉の中の “動き” を消すために,

「ある時刻 (N) を過ぎたらずっと目標値との “誤差” いくら以内」という形で扱う.

(3) そして, この “誤差” がいくらでも小さくできることを要求する.

ここまで来れば定義まであと少し．あとは授業に任せよう.

ここに書いたことは, 極限の定義に至る試行錯誤を個人的に想像した Story です.