

数学で用いる基礎的な記号 (by 山田)

ただし、記号などは研究分野 や 論文・教科書の著者などによって多少違うことがある.

1 固有な集合

$\emptyset$: 空集合

$\mathbf{N}$: 自然数の集合

$\mathbf{Z}$: 整数の集合

$\mathbf{Q}$: 有理数の集合

$\mathbf{R}$: 実数の集合

$\mathbf{C}$: 複素数の集合

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} \text{ for each } i\}$

($:=$ は「左辺を右辺で定義する」という意味の略号.)

2 集合 A, B を集合とする.

(0) $a \in A$ 「 a は A の元 (要素, element ともいう) である。」

(1) 集合の表し方

(i) 条件で定めるとき $\{\text{素数}\}$ 素数 全体の 成す集合

(ii) 元を全て挙げるとき $\{0, 1, 2, 3\}$

(iii) 部分集合の表記法 $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

(2) 集合の式

(i) $A \subset B$ A は B の「部分集合」; A に属する任意の元が B に属するという事.

(ii) $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$ 「 A と B の共通部分」

(iii) $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$ 「 A と B の和集合」

(iv) $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ 「 A と B の積集合」

3 写像 X, Y を集合とする. 「 X の任意の元に対して Y の元が指定されていること」を「 X から Y への写像」という. Y が $\mathbf{R}$ のときは 関数 とも呼ばれる.

$$\begin{array}{ll} f: X \rightarrow Y & (\text{例}) \quad f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto y = f(x) & (x, y) \mapsto z = f(x, y) = xy^2 \end{array}$$

は「集合 X から集合 Y への写像 f が X の元 x を Y の元 y に写す」ことを意味し, x から y を決める規則が $y = f(x)$ である. (矢印の始点のところの微妙な違いに注意)

4 論理 (これらは主に、黒板や紙面の節約のために使う記号.)

$\forall$ 「any: 任意の」, $\exists$ 「exist: 存在して」, $\Rightarrow$ 「ならば」, $\Leftrightarrow$ 「同等 (同値)」,
s.t. (～) = 「such that: (～) をみたすような」

例 1: 「 $A \subset B$ 」 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 「 $\forall a, a \in A \Rightarrow a \in B$ 」略して「 $a \in A \Rightarrow a \in B$ 」、 $\forall a \in A, a \in B$

例 2: (ϵ - δ 論法) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とは「 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ s.t. “ $n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$ ”」

言葉で言えば 「任意の正の数 ϵ に対してある自然数 N が存在して
“ N より大きい 任意の n について $|a_n - \alpha| < \epsilon$ ” が成り立つ」
この「 $\forall \epsilon > 0$ 」では「どんなに小さな 正の数に対しても」というところが重要.

順序も重要. 例 2 で「 $\exists N \in \mathbf{N}, \forall \epsilon > 0$ s.t. “ $n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$ ”」としたら誤り.

数学記号 $\exists, \forall$ などを使った文章の例, 論理 (by 山田)

実は $\exists$ を「存在する」, $\forall$ を「任意の」と単純に置き換えるだけでは, 意味は読み取れない. コツをいくつか挙げておく. ここでは $\wedge$ を「かつ (and)」, $\vee$ を「または (or)」, $\neg$ を否定の記号とする.

(1) $\exists$ を用いる場合は, 後ろにその条件が s.t. で付くことが多い. ($\sim$ をみたます**が存在する)

命題 : $\exists e \in \mathbf{Z}, \text{ s.t. } \forall x \in \mathbf{Z} \quad e + x = x = x + e.$

訳1 : 「任意の整数 x に対して $e + x = x = x + e$ をみたます整数 e が存在する」

注意 : (英語訳と同じように) 訳す順序が後ろからになることに注意.

それが嫌いであれば, 次のように訳してもよい.

訳2 : 「次の条件をみたます整数 e が存在する: 任意の整数 x に対して $e + x = x = x + e$ 」

この命題は 真の命題 である. 実際, e として ゼロ 0 がある.

(2) $\forall$ は「任意の $\sim$ に対して」と訳す場合が多い.

命題 P : $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } x \times y = 1.$

訳 : 「任意の整数 x に対して $x \times y = 1$ をみたます整数 y が存在する」

この命題 P は 偽の命題 である. 実際, $x = 2$ の場合に条件式 $2 \times y = 1$ をみたます整数 y は存在しない.
命題 P の否定命題 $\neg P$ を作ってみると,

命題 $\neg P$: $\exists x \in \mathbf{Z}, \forall y \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } x \times y \neq 1.$

訳1 : 「『任意の整数 y に対して $x \times y \neq 1$ 』をみたます整数 x が存在する」

訳2 : 「次の条件をみたます整数 x が存在する: 任意の整数 y に対して $x \times y \neq 1$ 」

命題 $\neg P$ は 真の命題 である. 実際, x として 2 が存在する.

通常の数学では, どんな命題 P についても, P か $\neg P$ のどちらか一方が 真 で 他方は 偽 である.

(3) 数学では, 次のような型の文, 命題に興味をもつ

「(**について) $\bigcirc\bigcirc$ ならば $\triangle\triangle$ 。」 記号的には $(**) \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$

「ならば」より前の $\bigcirc\bigcirc$ 部分, $P(x)$ が **仮定**, 「ならば」より後の $\triangle\triangle$ 部分, $Q(x)$ が **結論** である.

** の部分は, 全体の状況設定 (例えば x の設定) である.

この型の文章は, 正確には「仮定 $\bigcirc\bigcirc$ が成立する 全ての 場合に結論 $\triangle\triangle$ が成り立つ」という意味であるが, 下線部は省略されることがある. つまり,

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ とだけ記述して $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ を意味することあるので注意.

この否定 ($\neg(\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x))$) は次のようになる: $\exists x, P(x) \wedge \neg Q(x)$

つまり「仮定 $\bigcirc\bigcirc$ が成立していても結論 $\triangle\triangle$ が成り立たない ことがある」である. その具体例 のことを **反例** という. 例「 $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ 」は 偽. 反例 $x = -2$.

さて, 「『仮定』ならば『結論』」型の命題に対して「『結論』の否定 ならば『仮定』の否定」として構成した命題

「(**について) $\triangle\triangle$ でないならば $\bigcirc\bigcirc$ でない」 $(**) \quad \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$

を元の命題の**対偶命題**と呼ぶ. (正確には $\forall x, \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$)

通常の数学では 命題とその対偶命題とでは真偽が等しい. このことは言葉の意味からよく実感しておいてほしい. 何か命題を考えたり証明したりするとき, その命題よりも その対偶命題 の方が扱い易いことがある.