写像に関する数学用語（by 山田）

$\boxed{1}$ 全射, 単射, 全単射　　f を集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ とする.

(1) f が **全射**（上への写像, $f : X \twoheadrightarrow Y$）とは　「$\forall y \in Y, \exists x \in X$ s.t. $y = f(x)$」であること.

補足：Y の部分集合 $\{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ を「f **の 像**」とよび Im f, $f(X)$ などと表す.
これを用いて表せば,　$f : X \to Y$ が全射　$\Leftrightarrow$　Im $f = Y$　$\Leftrightarrow$　$f(X) = Y$.

[例]
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \end{array}$$

(2) f が **単射**（1対1写像, $f : X \hookrightarrow Y$）とは　「$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$」であること.

補足：Y の部分集合 B に対して X の部分集合 $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を「B **の** f **による 逆像**」とよび $f^{-1}(B)$ と表す. これを用いて表せば,　f が単射　$\Leftrightarrow$　$\forall x \in X$, $f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$.

[例]
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \mapsto & (y_1, y_2) = f(t) = (t, t^2). \end{array}$$

(3) $f : X \to Y$ が **全単射**とは　f が全射であり, なおかつ単射であること.

[例]
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = 2x - 1. \end{array}$$

注意：これらは <u>定義域 X や Y を定めた上で</u> 判定できる概念である.
「関数 $f(x) = x^2$ は 全射か？ 単射か？ 」という問は意味をなさない：

(1) $\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$　であれば, 単射でもなく全射でもない.

(2) $\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{R} & \to & \{r \in \mathbf{R} | r \geq 0\} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$　であれば, 単射ではないが 全射 である.

(3) $\begin{array}{cccc} f: & \{r \in \mathbf{R} | r \geq 0\} & \to & \{r \in \mathbf{R} | r \geq 0\} \\ & x & \mapsto & y = f(x) = x^2 \end{array}$　であれば, 全単射である.

$\boxed{2}$ 逆写像　写像 $f : X \to Y$ が全単射のとき, Y の各元 y に対して $f(x) = y$ となる X の元 x は

・ f の全射性から　存在して
・ f の単射性から　１つしかない

から次の写像が構成できる. これを f **の逆写像**と呼ぶ.

$$\begin{array}{cccc} f^{-1}: & Y & \to & X \\ & y & \mapsto & \text{“}f(x) = y \text{ となる } x\text{”}. \end{array}$$

注：記号 f^{-1} は「逆像」の意味で使われる場合と, 「逆写像」の意味で使われる場合がある.
「逆数 $\frac{1}{f}$」を表す場合もあるかも知れない. これらは前後の文脈から判断すること.

$\boxed{3}$ 基礎的な写像

（1）X から X 自身への "最も簡単" な次の写像を X の **恒等写像** 1_X （identity map）という.

$$\begin{array}{rccc} 1_X: & X & \to & X \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

つまり「何を入力しても入力したものがそのまま返ってくる」写像. 明らかに全単射.

（2）X から Y への写像で別の意味で "簡単" な（むしろ "つまらない"）次のような写像を **定値写像** c_{y_0} （constant map）という. ここで y_0 は Y の元.

$$\begin{array}{rccc} c_{y_0}: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & y_0. \end{array}$$

つまり「入力とは無関係に常に定値 y_0 が返ってくる」写像.

（3）A が X の部分集合（$A \subset X$）のとき、次の "自然" な写像を **包含写像** ι （inclusion）という.

$$\begin{array}{rccc} \iota: & A & \to & X \\ & a & \mapsto & a. \end{array}$$

つまり「属している集合を広くとりなおすだけ」の写像. 明らかに単射.

$\boxed{4}$ 写像の合成　○ X から Y への写像 $f: X \to Y$、○ Y から Z への写像 $g: Y \to Z$ が与えられると

次のようにして X から Z への写像 $g \circ f$ が定まる. これを **写像 f と g の合成** という.

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & X & \to & Z \\ & x & \mapsto & z = g(\,f(x)\,). \end{array}$$

つまり $(g \circ f)(x) = g(\,f(x)\,)$ である. 合成 $g \circ f$ では f を先に施すことに注意.

[例] $\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x,y) = f(t) = (t, t^2) \end{array}$ と $\begin{array}{rccc} g: & \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ & (x,y) & \mapsto & z = f(x,y) = e^x \sin y \end{array}$

を合成したものは

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & t & \mapsto & z = (g \circ f)(t) = g(f(t)) = e^t \sin t^2. \end{array}$$

略して　$z(t) = f(x(t), y(t)) = e^t \sin t^2$　と書くこともある.

１年生の数学だけでも, 少なくとも次の箇所でこの内容に遭遇するであろう.

微分積分学：逆関数, 合成関数の微分（１変数, 多変数）

線形代数学：線形写像, 像と核, 写像の合成

このプリントは, １年間の数学の中から写像に関係する部分を集めた　予告編　である.