

極値判定での誤った直感 (by 山田)

直感的には正しそうだが、実は間違っている.

[考え] 関数 $f(x, y)$ が原点で極小値かどうか考えるとき,

(条件A) 放射状に直線 $y = kx$ 達 および $x = 0$ に沿って考えて,

どの直線上でも原点で極小であれば どの方向からみても原点で極小というわけだから
 f は原点で極小になる.

ここで止まらずに最後まで読むこと. 上の考察は誤りです.

[例1] $f(x, y) = (y - x^2)^2$: 曲線 $y = x^2$ 上で $f = 0$ なのだから極値とは言わない.

[例2] $f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4 = (y - x^2)(y - 3x^2)$:

一見極小 (2次の項が y^2) に見えるが, 曲線 $y = 2x^2$ 上に沿って考えると
原点で極大にさえなっている.

いずれの例も 条件A は成り立っていますが極値ではありません. 極値の判定で $D = 0$ の場合の分析は, 実は大変難しいのです. 講義では $D = 0$ の下で極値でない場合の説明例を挙げましたが, 逆に $D = 0$ の下で極値である場合にそのことを証明するのが難しい. そこで, テーラー展開を用いて分析する方法を紹介します.

例 $f(x, y) = e^{-x^2+y^2} \cos(\sqrt{2}y) - 1$ が 原点(0,0) において極値かどうか判定せよ.

[結論] 極大値である.

f の (0,0) での テーラー展開 を4次まで取り出すと $-x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 = -\{x^2(1 - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2}y^4\}$ (5までの展開でも同じ, 5次の項がないからだ). そこで剰余項を $a(x, y)$ として

$$f(x, y) = -\left\{x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2}y^4\right\} + a(x, y)$$

とおき, 上の $\{ \}$ の中 (leading terms) を $f_L(x, y)$ とする.

$$f(x, y) = -f_L(x, y) \left\{ 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^4}{f_L(x, y)} \cdot \frac{a(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}^4} \right\}$$

と変形することによって, (0,0) を中心とする十分小さな円板 E をとり,

[1] E の上で $(x, y) \neq (0, 0)$ なら $f_L(x, y) > 0$,

[2] $\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^4}{f_L(x, y)} \right|$ が, E から原点を除いた領域 $E \setminus \{(0, 0)\}$ で 有界,

(ある正の値 M によって「0 以上 M 以下」と範囲が限られる. $\pm\infty$ にいかない.)

[3] $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left| \frac{a(X, Y)}{\sqrt{x^2 + y^2}^4} \right| = 0$. (剰余項だから)

の3つから, 円板 E の半径をさらに小さくしたもの E' をとれば

「領域 E' 内で $(x, y) \neq 0$ ならば $f(x, y) < f(0, 0) = 0$ 」

にすることができる. よって, この関数は (0,0) において極大値 0 をとる. $\square$

数学演習での, 大野真裕 先生の指摘と例を活かしました.