

マクローリン展開

教科書と数学演習の解答例の違いに困っている学生のために：

[一言] 多項式は扱いやすい. 変数と定数の「たし算」と「かけ算」だけで値が得られる. それに微分もしやすい.

[目標] 複雑な関数を多項式で近似したい. せめて定点 (a, b) の近くだけでも.

[例 1] $e^x \sin y$ のマクローリン展開 (= $(0, 0)$ でのテーラー展開)

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{6}(3x^2y - y^3) + \frac{1}{6}(x^3y - xy^3) + \cdots$$

[例 2] $e^x \sin y$ の $(1, \frac{\pi}{2})$ でのテーラー展開

$$\begin{aligned} e^x \sin y &= e + e(x-1) + \frac{e}{2}\{(x-1)^2 - (y - \frac{\pi}{2})^2\} \\ &\quad + \frac{e}{6}\{(x-1)^3 - 3(x-1)(y - \frac{\pi}{2})^2\} + \cdots \end{aligned}$$

教科書に従えばこれは

$$e^{1+h} \sin(\frac{\pi}{2} + k) = e + eh + \frac{e}{2}\{h^2 - k^2\} + \frac{e}{6}\{h^3 - 3hk^2\} + \cdots$$

さて、この2つの例では末尾の $+\cdots$ のところを説明していない：

(問題点 1) その次の項、その続き¹はどうするのか？

(問題点 2) 続けていけば 近似ではなく 等号 が成り立つのか？

そのところを学んで欲しい.

ここではマクローリン展開 (定点が原点 $(0, 0)$ の場合 ; 教科書でいえば $a = b = 0$ の場合) だけ説明する.

[アイデア] 「関数 $f(x, y)$ を、原点の近くで、多項式で近似したい」という あいまいな目標 を次のように、数学的にはっきりさせる：関数 $f(x, y)$ が多項式²

$$P(x, y) = a_0 + b_{10}x + b_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \cdots \quad (A)$$

で近似される $f(x, y) \doteq P(x, y)$ ならば、次のことが成り立つはずだ、と考えるのである.

¹通常 $\cdots$ は意味が通じるように使うべきである. 例：1, 2, 4, 8, $\cdots$

² P は polynomial = 多項式 の頭文字

$$\text{即 } (0,0) \text{ 代入して等しい} \quad f(0,0) = P(0,0), \quad (0)$$

$$\text{偏微分の後 代入して等しい} \quad f_x(0,0) = P_x(0,0), \quad (1)$$

$$f_y(0,0) = P_y(0,0),$$

$$2 \text{ 回偏微分の後 代入して等しい} \quad f_{xx}(0,0) = P_{xx}(0,0), \quad (2)$$

$$f_{xy}(0,0) = P_{xy}(0,0), \quad (2')$$

$$f_{yy}(0,0) = P_{yy}(0,0),$$

$$\text{“何回か偏微分して } (0,0) \text{ 代入”} \quad \vdots$$

この考えで「 $f(x,y)$ の多項式による近似 $P(x,y)$ 」としてふさわしい係数 $a_0, b_{10}, b_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}, \dots$ が求められる. 例えば $P(0,0) = a_0, P_x(0,0) = b_{10}$ であるから,

$$\text{式 (A) と 式 (0) から} \quad a_0 = f(0,0)$$

$$\text{式 (A) と 式 (1) から} \quad b_{10} = f_x(0,0) \text{ さらに}$$

$$\text{式 (A) と 式 (2) から} \quad 2c_{20} = f_{xx}(0,0)$$

$$\text{式 (A) と 式 (2') から} \quad c_{11} = f_{xy}(0,0)$$

など. 他も同様

太字の 2 は x^2 を 2 回微分した時に出てくる.

結局「多項式による $f(x,y)$ の近似 $P(x,y)$ 」として

$$\begin{aligned} P(x,y) = & f(0,0) \\ & + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ & + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2 \\ & + \dots \end{aligned}$$

が得られる. 太字以外のところは定数で, それらはもとの関数 $f(x,y)$ から“偏微分と $(0,0)$ 代入”で引き出したデータである. これが $f(x,y)$ のマクローリン展開 (の最初の方) である.

[考察] 2 次のところで, x^2 の係数や y^2 の係数には $\frac{1}{2}$ があるのに xy の係数にはそれがない. これは $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2$ と $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} xy = 1$ との差から生じている. このことに注意してもっと高次まで $P(x,y)$ を調べるときの $x^i y^j$ の係数を公式にすると,

$$\text{マ展開の } x^i y^j \text{ の係数} = \frac{1}{i! \cdot j!} f_{x \dots x y \dots y}(0,0).$$

ただし $0! = 1$ とし, f の添字は x が i 個 y が j 個. さらに $P(x,y)$ の n 次 ($x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \dots, y^n$) の項をまとめて $\frac{1}{n!}$ で通分して書くと

$$\text{マ展開の } n \text{ 次の項の和} = \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! \cdot j!} f_{x^i y^j}(0,0) x^i y^j.$$

いよいよ教科書の記述に近づいてきた. Σ の中の $\frac{n!}{i! \cdot j!}$ は 2 項係数 $\binom{n}{i}$, つまり $(x+y)^{(i+j)}$ を「2 項展開」したときの $x^i y^j$ の係数に一致する.

教科書では、上の式の右辺にある和 Σ を手短かに

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$

という「2 項展開の記法」を採用してある. そこには

$$(hx + ky)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! \cdot j!} h^i k^j x^i y^j$$

から連想される次の式が込められている.

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! \cdot j!} h^i k^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j$$

等号の両辺にあるのは「偏微分と定数 (h とか k) 倍を混ぜた“指令”」(「微分作用素」などという)である.

[教科書の記述] なぜ教科書では突然 新たな文字 h とか k とかを使ったのか? それはこの「2 項展開の記法」を使うときに x や y を そのまま使うと次のような誤解が起こるからだ.

例えば $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$ と書くと 係数 x, y が 変数 と見なされ, その場合には

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f \\ &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) (x f_x + y f_y) \\ &\quad \left(\text{途中で } x \frac{\partial}{\partial x} (x f_x) = x f_x + x^2 f_{xx} \text{ など}\right) \\ &= (x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}) + \underline{(x f_x + y f_y)} \end{aligned}$$

となってしまう. 下線の部分はマクローリン展開には あってはならない間違った項であり、誤解によって変数と見なされた x を $\frac{\partial}{\partial x}$ が微分してしまったことで出てきている. 別の文字 h, k を使うことで, この誤解をさけることができる.

[問題点 2] 以上で、マクローリン展開の各項の係数の計算方法が説明された。これで (問題点 1) を解決した。まだ (問題点 2) 「この計算を続けたら左辺と右辺 (もとの関数 $f(x, y)$ とそのマクローリン展開) は等しくなるのか」が残っている。(無限に続けると級数 (解析学で学ぶ) も関係してくる。)

[剰余項] 関数を多項式で近似して、それを等式でつなごうとすると、誤差を処理しなくてはならない。そこで「平均値の定理」を参考にしたい方法がある：マクローリン展開を $n-1$ 次の項まで求めたら、その次の微分 (n 回の偏微分) 達を使って、誤差がどの程度かを評価することができる。それが 剰余項 である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(\theta h, \theta k) \\ = \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! \cdot j!} f_{x \cdots x y \cdots y}(\theta h, \theta k) h^i k^j. \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

h と k は定数だから変数は θ だけで範囲も限られており、誤差がどの程度かを測るのに使える。 θ についての記述「... となる θ が存在する。」の文章の真意を理解して欲しい。誤差をある範囲に“追い詰める”だけで、誤差を値で求めようとはしていない。

この 剰余項 を書いておけば、 $+\cdots$ とごまかすことなく両辺を等号でつなぐことができる。

[横着] ところで、実は初めの [例 1] ($e^x \sin y$ の展開) は次のように求めた：

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\ \sin y &= y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + \cdots \end{aligned}$$

の 2 つをかけて次数の低いところから順に展開していった。