

微積：マクローリン・テーラー展開のアイデア (by 山田)

ここにアイデアを書き，黒板で計算を実行します。黒板が小さいのがいけない。

[一言] 多項式 は扱いやすい。変数と定数の「たし算」と「かけ算」だけで値が得られる。
それに微分もしやすい。

[目標] 複雑な関数を 多項式 で近似したい。せめて x がある値 a の近くだけでも。

[例 1] e^x のマクローリン展開 (とは $x = 0$ でのテーラー展開のこと)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

[例 2] $\sin x, \cos x$ のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots$$

[例 3] $\log x$ の $x = 1$ でのテーラー展開

$$\log x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 + \cdots$$

または $x = 1 + h$ として変形し “ $\log(1 + h)$ の $h = 0$ での展開” に直す。

$$\log(1 + h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{4}h^4 + \cdots$$

さて、これらの例では末尾の $\cdots$ のところ¹ を説明していない：

(問題点 1) その次の項、その続き 一般項はどうするのか？

(問題点 2) 続けていけば 近似 ではなくいつか 完全な等号 が成り立つのか？

この 2 点を学んで欲しい。

ここでは マクローリン展開 ($x = 0$ の場合) だけ説明する。

[アイデア] 「関数 $f(x)$ を、原点の近くで、多項式で近似したい」という あいまいな目標 を次のように、数学的にはっきりさせる：関数 $f(x)$ が多項式 $P(x)$ ²

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \quad (A)$$

で近似されて $f(x) \doteq P(x)$ が実現したならば、次のことが成り立つはずだ、と考えるのである。

$$\text{とにかくまず } x = 0 \text{ を代入して等しい } f(0) = P(0), \quad (0)$$

$$1 \text{ 回微分して } x = 0 \text{ を代入して等しい } f'(0) = P'(0), \quad (1)$$

$$2 \text{ 回微分して } x = 0 \text{ を代入して等しい } f''(0) = P''(0), \quad (2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$n \text{ 回微分して } x = 0 \text{ を代入して等しい } f^{(n)}(0) = P^{(n)}(0), \quad (n)$$

¹点々々... を用いるときは、その部分が常識的に予想可能でなくてはならない。例：1, 3, 5, 7, ...

² P は polynomial = 多項式 の頭文字。この時点では 無限に続く とは考えていない。

これだけで「 $f(x)$ の多項式による近似 $P(x)$ 」としてふさわしい係数 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ が求められる。多項式 $P(x)$ に対する“微分して $x = 0$ 代入”作業は簡単で、

$$\begin{aligned} P(0) &= a_0 \text{ と式 (0) から} & a_0 &= f(0) \\ P'(0) &= a_1 \text{ と式 (1) から} & a_1 &= f'(0) \\ P''(0) &= 2a_2 \text{ と式 (2) から} & 2a_2 &= f''(0) \text{ など, となる.} \end{aligned}$$

太字の 2 は x^2 を 2 回微分した時に出てくる。

結局「多項式による $f(x)$ の近似 $P(x)$ 」として

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots$$

が得られる。 $f(0), f'(0)$ などは定数で、それらはもとの関数 $f(x)$ から“微分と $x = 0$ 代入”で引き出したデータである。これが $f(x)$ のマクローリン展開（の最初の方）である。もっと高次まで $P(x)$ を調べるときの x^n の係数は、 x^n の n 回めの微分が $n!$ であることから $f^{(n)}(0) = n!a_n$ となって、

$$\text{マ展開の } x^n \text{ の係数 } a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

以上で、マクローリン展開の各項の係数の計算方法が説明された。これで（問題点 1）を解決した。まだ（問題点 2）「この計算を続けたら左辺と右辺（もとの関数 $f(x)$ とそのマクローリン展開）はいつか等しくなるのか」が残っている。（無限に続けると級数（解析学で学ぶ）が関係し、困難な問題が持ち上がってくる。）

[剰余項] 関数を多項式で近似して、それを等式でつなごうとすると、誤差を処理しなくてはならない。そこで「平均値の定理」を参考としたいいい方法がある：マクローリン展開を n 次の項まで求めたら、その次の微分（ $n+1$ 回めの微分）を使って、“誤差”がどの程度かを評価することができる。それが剰余項である。具体的には

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1} \quad \exists \theta \in (0, 1).$$

（ $x = 0$ の近くのある範囲内で） x を変数と見るならば θ は x によって変化する“ $\theta(x)$ ”が、一旦 x を固定すれば θ も定まり、その範囲が限られているため、この誤差「剰余項」がどの程度かを測るのに使える。 θ についての記述「... となる θ が存在する。」の文章の真意を理解して欲しい。誤差を値で求めようとはせず“追い詰め”ているところに意義がある。具体的には

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \sup_{\theta \in (0,1)} |f^{(n+1)}(\theta x)| \quad \text{以下}$$

に抑え込んでいる。また、関数 $f(x)$ が C^{n+1} 級であればこの剰余項は $o(x^n)$ とかける。なぜなら、 $x \rightarrow 0$ は $\theta x \rightarrow 0$ を導き、 $f^{(n+1)}(x)$ が連続だから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x \right) = 0.$$

いずれにしても、この剰余項を書いておけば、 $+\dots$ とごまかすことなく両辺を等号でつなぐことができる。

以上