f_{xy} と f_{yx} について（by 山田）

「普通 $f_{xy} = f_{yx}$ と思ってよい」の普通とは

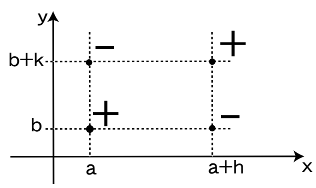
> **定理：** f_{xy} と f_{yx} がある領域で共に存在して (a,b) で連続ならば $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

証明のアイデア：

$$\begin{cases} f_{xy}(a,b) & (x \text{ が先}) \\ f_{yx}(a,b) & (y \text{ が先}) \end{cases}$$ 両方が "x, y で同時にやった (!?) もの" に一致することを示す.

証明：h, k の２変数関数 $\Delta(h,k)$ を次のようにおき，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk}$ を考える：

$$\Delta(h,k) \;=\; f(a+h, b+k) \;-\; f(a+h, b) \;-\; f(a, b+k) \;+\; f(a+h, b+k).$$



２手に分かれて考えよう．同じことを x と y の役目を取りかえて行なう.

（x が先）	（y が先）
$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$ とおく.	$\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ とおく.
$\varphi'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$ である.	$\psi'(y) = f_y(a+h, y) - f_y(a, y)$ である.
$\Delta(h,k) = \varphi(a+h) - \varphi(a)$	$\Delta(h,k) = \psi(b+k) - \psi(b)$
$= h\varphi'(a+\theta h) \quad \exists\theta$	$= k\psi'(b+\tau k) \quad \exists\tau$
$= h\{f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)\}$	$= k\{f_y(a+h, b+\tau k) - f_y(a, b+\tau k)\}$
$= hk f_{xy}(a+\theta h, b+\tau' k) \quad \exists\tau'$	$= kh f_{yx}(a+\theta' h, b+\tau k) \quad \exists\theta'$

ここまで 各列で ２回ずつ「平均値の定理」を使った. $\theta, \tau, \theta', \tau'$ は全て $[0,1]$ の範囲に存在する.

f_{xy} の連続性と	f_{yx} の連続性と
$(h,k) \to (0,0)$ で $(a+\theta h, b+\tau' k) \to (a,b)$	$(h,k) \to (0,0)$ で $(a+\theta' h, b+\tau k) \to (a,b)$
により,	により,
$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = f_{xy}(a,b).$	$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = f_{yx}(a,b).$

以上から,

$$\Delta(h,k) := f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$$

について

$$f_{xy}(a,b) \;=\; \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} \;=\; f_{yx}(a,b)$$

証明終 □

$\boxed{f_{xy}(a,b) \neq f_{yx}(a,b) \text{ となる例}}$ （両辺が存在していて一致はしていない例）

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

確認してみよう．（計算は各自でチェックすること.）

（x が先）	（y が先）
$(x,y) \neq (0,0)$ のとき $f_x(x,y) = \dfrac{y^3(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.	$(x,y) \neq (0,0)$ のとき $f_y(x,y) = \dfrac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
$(x,y) = (0,0)$ で $f_x(0,0) = 0$. （$f(x,0) = 0$ なので）	$(x,y) = (0,0)$ で $f_y(0,0) = 0$. （$f(0,y) = 0$ なので）

$(x,y) \neq (0,0)$ のとき $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{3y^2(-x^4+2x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$. しかし $(x,y) = (0,0)$ において,

$f_x(0,y) = \dfrac{y^3(-0^2+y^2)}{(0^2+y^2)^2} = \dfrac{y^5}{y^4} = y$ により, $f_{xy}(0,0) = 1$.	$f_y(x,0) = \dfrac{x \cdot 0^2 \cdot (3x^2+0^2)}{(x^2+0^2)^2} = 0$ により, $f_{yx}(0,0) = 0$.

したがって，この例では $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ となっている．$\square$

ちなみに, 下で示すように $\underline{f_{xy} \text{ も } f_{yx} \text{ も } (0,0) \text{ で連続ではない}}$.

$$[y=0 \text{ に沿って}] \lim_{(x,y)\to(0,0),\, y=0} f_{xy}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot 0^2(-x^4+2x^2 \cdot 0^2+0^4)}{(x^2+0^2)^3} = 0.$$

$$[y=x \text{ に沿って}] \lim_{(x,y)\to(0,0),\, y=x} f_{xy}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(-x^4+2x^2x^2+x^4)}{(x^2+x^2)^3} = \frac{3}{4}.$$

近づけ方によって違う値に収束しているから，極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$ は存在しない.

$f_{xy}(x,y)$ は（$f_{yx}(x,y)$ も）$(0,0)$ で連続ではない．だから, 前頁の定理には矛盾しない.