

微積：そ～うっ と増え始める関数の話 (by 山田)

次の条件 (1), (2), (3) をみたす関数 $y = f(x)$ は存在するか？

- (1) $f(x) = 0$ if $x \leq 0$.
- (2) $f(x) > 0$ if $x > 0$.
- (3) $f'(x) = 0, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0, \dots$. つまり $f^{(n)}(0) = 0$ for $\forall n \in \mathbf{N}$.

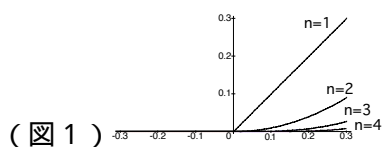
言ってみれば「 $x = 0$ で何回微分しても“増加し始めた形跡”が発見できない関数」と言える.

例えば, 安直に自然数 n を大きくとって

$$p_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto y = p_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ x^n & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

グラフ (図 1) をみるとそれなりに滑らかだが, この関数は C^{n-1} 級で n 回めの微分が $x = 0$ で不可能 (C^n 級ではない). その時点で“増加し始めた形跡” がバレてしまった, と言える. さて, あらためて, 上のような関数は存在するだろうか？



```
> plot([t,0,t=-0.3..0],
       [t,exp(-1/t),t=0..0.3]);
```

(図 2) 座標軸は省略 (重なってしまうから)

実は存在する！ 次の関数とその例でそのグラフが図 2 である.

$$\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto y = \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

まず, この関数が連続であることは $\lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = \rho(0)$ から分かる. 以下, この関数 $\rho(x)$ が条件 (3) をみたすことを証明する. その途中で, 次のことを何回となく利用する.

補題 [“指数関数 e^t は, どんな多項式 $p(t)$ よりも急速に増加する”]

$$p(t) \text{ が } t \text{ の多項式の時, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{e^t} = 0.$$

これと同じことだが, 使いやすいように次の形にしておく.

補題 1. $P(t)$ が t の多項式の時, $\lim_{x \rightarrow +0} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

準備はできた. 証明の方法は 微分の数回 n に関する数学的帰納法である.

目標： 任意の自然数 n に対して, 命題 A 「 $\rho^{(n)}(0) = 0$ 」が正しい.

Step1 $x > 0$ で $\rho'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. $P_1(t) = t^2$ とおけば $\rho'(x) = P_1(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ と表わせる. これにより $\lim_{x \rightarrow +0} \rho'(x) = 0$ となる.

$x = 0$ において, 左からの極限 $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{\rho(h) - \rho(0)}{h} = 0$ は明らか. 右からの極限については, $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\rho(h) - \rho(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = 0$ となる. なぜなら, これは $Q_1(t) = t$ としたときの $Q_1(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h}}$ の極限だから. よって $\rho'(0) = 0$ が示された.

[Step1 の結論] $\rho(x)$ は C^1 級で, 2 次式 $P_1(t)$ を用いて $\rho^{(1)}(x) = P_1(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) と表せて $n = 1$ に対して命題 A は正しい.

Stepk [Step k の仮定 (帰納法)] $\rho(x)$ が C^k 級で, $2k$ 次式 $P_k(t)$ を用いて $\rho^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) と表せて $n = k$ に対して命題 A が正しいこと, を仮定する.

$x > 0$ で

$$\begin{aligned}\rho^{(k+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2} \cdot P'_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} + P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left\{ -\frac{1}{x^2} \cdot P'_k\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right\} e^{-\frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

そこで $P_{k+1}(t) = -t^2 P'_k(t) + t^2 P_k(t)$ とおけば, P_k が $2k$ 次式だったので P_{k+1} は $2(k+1)$ 次式となった上で $\rho^{(k+1)}(x) = P_{k+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ と表わせる. これにより $\lim_{x \rightarrow +0} \rho^{(k+1)}(x) = 0$ となる.

$x = 0$ において, 左からの極限 $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{\rho^{(k)}(h) - \rho^{(k)}(0)}{h} = 0$ は明らか. 右からの極限について, $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\rho^{(k)}(h) - \rho^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{P_k(\frac{1}{h})}{h} e^{-\frac{1}{h}} = 0$ となる. なぜなら, これは $Q_{k+1}(t) = t \cdot P_k(t)$ とした (Q_{k+1} は $2k+1$ 次式) ときの $Q_{k+1}(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h}}$ の極限だから. これで $\rho^{(k+1)}(0) = 0$ が示された. $\rho(x)$ は $k+1$ 回微分可能で, $\rho^{(k+1)}(0)$ は連続である.

[Step k の結論] $\rho(x)$ は C^{k+1} 級で, $2(k+1)$ 次式 $P_{k+1}(t)$ を用いて $\rho^{(k+1)}(x) = P_{k+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) と表せ, $n = k+1$ に対しても命題 A は正しい.

数学的帰納法により 全ての自然数 n について命題 A 「 $\rho^{(n)}(0) = 0$ 」が証明された.□

同時に $\rho(x)$ が C^∞ 級であることも証明された.

さて, この関数 $\rho(x)$ の テーラー展開 (級数展開: 解析学) はどうなる? 変なことがおこっている. このことに興味があれば「 C^ω 級の関数」という用語を図書館などで調べてみるといい.

(問) $\rho(x)$ を上で構成した関数とする. 次の関数 $y = f(x)$ のグラフを図示せよ.

$$f(x) = \frac{\rho(x+1)}{\rho(1-x) + \rho(x+1)}. \quad \text{ヒント: 段差}$$