

双曲線関数 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ (by 山田)

定義式

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

定義域 $\rightarrow$ 値域

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} \rightarrow [1, \infty)$$

$$\mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$$

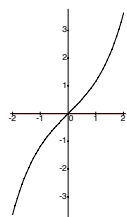
特徴

単調増加, 奇関数 ($f(-x) = -f(x)$)

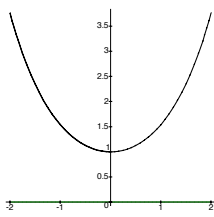
$x = 0$ で極小, 偶関数 ($f(-x) = f(x)$)

単調増加, 奇関数 ($f(-x) = -f(x)$)

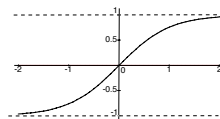
`> plot([t, (exp(t)-exp(-t))/2, t=-2..2]);` `> plot([t, (exp(t)+exp(-t))/2, t=-2..2]);` `> plot([t, (exp(t)-exp(-t))/(exp(t)+exp(-t)), t=-2..2]);`



$y = \sinh x$



$y = \cosh x$



$y = \tanh x$

これらは (h を取り除いた時の) 3 角関数と良く似た性質をもつ. 比べてみよう!

3 角関数 (h なし) の公式

双曲線関数 (h あり) の公式

(1) 関数の間の等式

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2) 倍角公式

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

3 角関数の公式

双曲線関数の公式

(3) 和公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$$

(4) 積和公式

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} \{ \cos(x+y) - \cos(x-y) \}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \{ \sin(x+y) + \sin(x-y) \}$$

(5) 和積公式

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

(6) 微積分 (積分定数は省略)

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \int \tan x \, dx = -\log(\cos x)$$

(7) 逆関数

$$\sinh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$\cosh^{-1} x = \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \geq 1)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (-1 < x < 1)$$

(8) 逆関数の微分

$$(\operatorname{Sin}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{Cos}^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{Tan}^{-1} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$