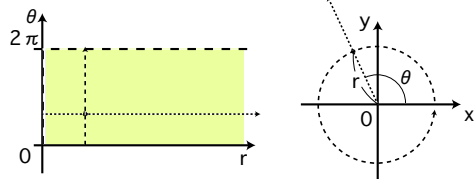


極座標変換 (by 山田)

1 変換式と対応 厳密には, “連続的に 1 対 1 対応でない部分” は除いた方がよい.



$r\theta$ -座標 から xy -座標 へ	xy -座標 から $r\theta$ -座標 へ
$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$
$r > 0,$ $0 < \theta < 2\pi$ (or $-\pi < \theta < \pi$)	$(x, y) \neq (0, 0)$ また, x -軸の正か 負の部分を除く

(1) $(x, y) = (1, -1)$ を (r, θ) に変換すると? $(r, \theta) = (2, \frac{2}{3}\pi)$ を (x, y) に変換すると?

(2) 直線 $y = -x$ や 直線 $y = 1$ を $r\theta$ -座標 に変換すると?

直線 $r = 2$ や 曲線 $r = \cos \theta$ (範囲に注意) を xy -座標 に変換すると?

(3) 関数 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ が xy -座標 について $f = xy^2$ と表されているとき,
 $r\theta$ -座標 についての表示を求めよ.

注意: このような設定では $f(1, 0)$ という表示は混乱を招く. $(x, y) = (1, 0)$ なのか $(r, \theta) = (1, 0)$ なのか判断できないからだ. 慣れるまでは $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ の形にして書くといよい.

2 偏微分と変数変換 各マスの中では, 左が $r\theta$ -座標による表示, 右が xy -座標による表示.

偏微分の表

	x	y
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$-r \sin \theta = -y$	$r \cos \theta = x$
	r	θ
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$-\frac{\sin \theta}{r} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

注意: x と y が組, r と θ が組である: $\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}$ は右辺が “マナー違反”.

公式 “ $\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ ” により,

$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial \theta} = -y \cdot \frac{\partial}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$

(4) 前の問題 (3) の関数 f について次の 2 通りの計算を比べよ.

(あ) x による偏微分 $\frac{\partial}{\partial x} f$ を計算し $r\theta$ -座標 で表示する.

(い) $r\theta$ -座標で表示した f を, $\frac{\partial}{\partial x}$ を $r\theta$ -座標 に変換した偏微分作用素で偏微分.

3 2次の偏微分

次のそれぞれを $r\theta$ -座標の偏微分作用素に変換せよ.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} =$$

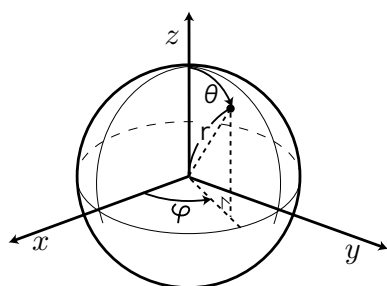
$$\text{ラプラシアン: } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} =$$

4 積分の変換

$$\text{ヤコビ行列式: } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = r \quad \text{よって} \quad \boxed{dx dy = r dr d\theta}.$$

5 空間の極座標, 変換式と対応

これまでと同様の計算 (ラプラシアンまで) をメモっておけ.



$r\theta\varphi$ -座標 から xyz -座標 へ	xyz -座標 から $r\theta\varphi$ -座標 へ
$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$
$r > 0, 0 < \theta < \pi$ $0 < \varphi < 2\pi$	xz -平面を z -軸で 2 つに分けて 片方の半平面 (含 z -軸) を除く.

ヤコビ行列式:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = r^2 \sin \theta \quad \text{となり,}$$

$$\boxed{dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}. \quad (\text{一度は自分で計算しておくこと})$$