

微積： $x^n \sin \frac{1}{x}$ の話 (by 山田)

「ぐちゃぐちゃで連続かどうか分かりにくい」とか
 「微分可能だが C^1 級でない」とか
 「 C^n 級だが C^{n+1} 級でない」とか.

「連続だが微分不可能」とか
 「 n 回微分可能だが C^n 級でない」とか

紙の節約のため、話題にする関数を f_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) と書くことにする.

$$f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

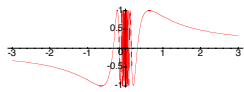
$$x \mapsto y = f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

グラフ： $y = f_0(x)$

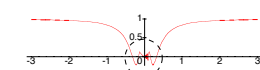
$y = f_1(x)$

$y = f_2(x)$

> plot([t, sin(1/t), t=-3..3]);

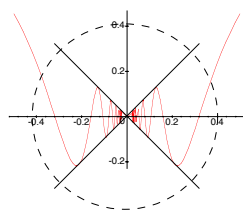


> plot([t, t*sin(1/t), t=-3..3]);

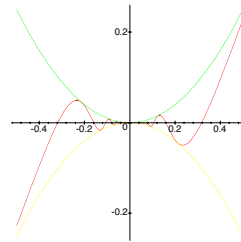


拡大

> plot([t, t*sin(1/t), t=-0.5..0.5]);



> plot([t, t^2*sin(1/t), t=-0.5..0.5],
[t, t^2, t=-0.5..0.5], [t, -t^2, t=-0.5..0.5]);



- (1) $f_0(x)$ は $x = 0$ で連続でない. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ は収束しない.

$a_n = \frac{1}{n\pi}$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$. 一方,

$b_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{4n+1}{2}\pi = 1$.

x を 0 に近づけると、近づけ方によって異なる値に収束することが示せた. この極限は存在しない.

- (2) n が 1 以上なら $f_n(x)$ は $\mathbf{R}$ 全体で連続. $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x}$ は収束して $= 0$.

まず $|\sin \blacksquare| \leq 1$, $\blacksquare$ の中が何であっても. よって $0 \leq |x^n \sin \frac{1}{x}| = |x^n| \cdot |\sin \frac{1}{x}| \leq |x^n|$. この極限をとって $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x^n \sin \frac{1}{x}| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x^n| = 0$. よって $\lim_{x \rightarrow 0} |x^n \sin \frac{1}{x}| = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0$.

- (3) $\sin$ の代わりに $\cos$ を使った次の関数 $g_n(x)$ でも同様.

$$y = g_n(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \text{ について,}$$

(1') $g_0(x)$ は $x = 0$ で連続でない. (2') n が 1 以上なら $g_n(x)$ は $\mathbf{R}$ 全体で連続.

(4) $f_1(x)$ は $x = 0$ で微分不可能.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}. \quad \text{先に (1) で調べた通り, この極限は存在しない.}$$

(5) $f_2(x)$ は $\mathbf{R}$ 全体で微分可能.

$$x = 0 \text{ 以外での微分可能性は明らか. 問題は } f'_2(0) \text{ の存在性である. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h}. \quad \text{先に (2) で調べた通り, この極限 (= } f'_2(0) \text{)} \text{ は存在して } = 0.$$

(6) $f_2(x)$ は C^1 級ではない. つまり $f'_2(x)$ は連続ではない.

$x \neq 0$ では $f'_2(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. (5) の $f'_2(0) = 0$ と $\lim_{x \rightarrow 0} f'_2(x)$ が一致するかどうか調べる. $\lim_{x \rightarrow 0} f'_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$. 第 1 項は先に (2) で調べた通り 0 に収束するが, 第 2 項が先に (1') で述べた通り収束しないのでこの極限は存在しない.

(7) $f_3(x)$ は C^1 級である.

$$f'_3(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \sin \frac{1}{h} = 0. \quad \text{一方, } x \neq 0 \text{ では } f'_3(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}. \text{ (6) のときと同様に第 1 項については (2) が利用できるが, 今回の第 2 項については (2') が適用できて } \lim_{x \rightarrow 0} f'_3(x) = 0 \text{ が示せる. よって } f_3(x) \text{ は微分可能であって } f'_3(x) \text{ が連続. つまり } f_3(x) \text{ は } C^1 \text{ 級である.}$$

(8) $f_3(x)$ は 2 回微分不可能. 特に C^2 級ではない.

$$f''_3(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_3(h) - f'_3(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 \sin \frac{1}{h} - h \cos \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3h \sin \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h}. \quad \text{第 1 項は先に (2) で調べた通り 0 に収束するが, 第 2 項が先に (1') で述べた通り収束しないのでこの極限は存在しない.}$$

(9) 次の文章の 2 つの空欄 X, Y を埋めて文章を完成させよ.

$f_n(x)$ は $\boxed{X}$ 回まで微分可能で $C^{\boxed{Y}}$ 級であるが $C^{\boxed{Y}+1}$ 級ではない.

(X) とところで, (5) で $f'_2(0) = 0$ を確認したが関数 f_2 は $x = 0$ で極値をもっているのでしょうか?