

微分形式による積分計算例 (by 山田)

「微分積分学」の積分計算は各自で復習して下さい.

目標 「ベクトル解析」の計算方法と同じ結果になることを確認する.

F1. 曲線に沿う1次微分形式の積分

曲線 (らせん) $C: \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) に沿う
1次微分形式

$$\mu = 2y \, dx + x \, dy + \sin^2 z \, dz$$

の線積分 $\int_C \mu$

まず x, y, z 達を (dx, dy, dz も) みな t に変換する.

$$dx \rightarrow \frac{dx}{dt}(t) \, dt, \quad dy \rightarrow \frac{dy}{dt}(t) \, dt, \quad dz \rightarrow \frac{dz}{dt}(t) \, dt$$

この出題の場合

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t \, dt \\ dy = \cos t \, dt \\ dz = dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 2 \sin t (-\sin t) dt + \cos t \cos t \, dt + \sin^2 t \, dt \\ &= (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = (1 - 2 \sin^2 t) dt \end{aligned}$$

よって

$$\int_C \mu = \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \sin^2 t) dt = \cdots = \underline{0}$$

F2. 曲面に沿う2次微分形式の積分

上半球面 $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4; z \geq 0\}$ での2次微分形式

$$w = 4x \, dy \wedge dz + 4y \, dz \wedge dx - z \, dx \wedge dy$$

の面積分 $\int_S w$

S を $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} : x^2 + y^2 \leq 4$ とみなす.

座標として $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2})$, $D : u^2 + v^2 \leq 4$ とする.

向きの確認: 法ベクトルの z -成分が正なので, この向きでよい.

x, y, z 達を (dx, dy, dz も) みな u, v に変換する. 方法は,

$$dx \rightarrow \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \, du + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \, dv$$

y, z についても同様.

この問題の場合,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{4 - u^2 - v^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \\ dz = -\frac{u}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}} du - \frac{v}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}} dv \end{cases}$$

以下では $\sqrt{4 - u^2 - v^2}$ を短く $\sqrt{\quad}$ と表す. これを使って, w を u と v の2次形式に直す (外積代数 $\wedge$ の性質 $dv \wedge du = -du \wedge dv$ や $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$ を使う) と

$$\begin{aligned} w &= 4x \, dy \wedge dz + 4y \, dz \wedge dx - z \, dx \wedge dy \\ &= 4u \, dv \wedge \left(-\frac{u}{\sqrt{\quad}} du - \frac{v}{\sqrt{\quad}} dv \right) \\ &\quad + 4v \left(-\frac{u}{\sqrt{\quad}} du - \frac{v}{\sqrt{\quad}} dv \right) \wedge du - \sqrt{\quad} \, du \wedge dv \\ &= \left(\frac{4u^2 + 4v^2 - \sqrt{\quad}^2}{\sqrt{\quad}} \right) du \wedge dv = \left(\frac{4 + 5u^2 + 5v^2}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}} \right) du \wedge dv \end{aligned}$$

となるので

$$\int_S w = \iint_D \frac{4 + 5u^2 + 5v^2}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}} du dv = \cdots = \frac{32\pi}{3}$$

最後の段階で重積分に直すとき, $\wedge$ を削除する.