

微分形式を使って電磁気学 (by 山田)

時空の4次元で考える

Maxwell の方程式 のための設定

名称 記号 真空中での関係 物理定数 (真空中)

電束密度: $\mathbf{D}$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ 誘電率: ε_0

電界: $\mathbf{E}$

磁束密度: $\mathbf{B}$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 透磁率: μ_0

磁界: $\mathbf{H}$

電荷密度: ρ 光速: c ($c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$)

電流密度: $\mathbf{j}$

以下では, 真空中での関係式から $\mathbf{E}$ ($= \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}$) と $\mathbf{B}$ ($= \mu_0 \mathbf{H}$) だけを用いることとする.
 ρ はスカラー場で, $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}$ はベクトル場. これらの成分を

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

とする (E_i, B_i, j_i はいずれも関数) .

Maxwell の方程式

クーロンの法則 $\text{div } \mathbf{D} = \rho$

磁荷の非存在 $\text{div } \mathbf{B} = 0$

アンペールの法則 $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$

ファラデーの法則 $\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$

Maxwell の4つの方程式を成分で表すと

クーロンの法則

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (1)$$

磁荷の非存在

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2)$$

アンペールの法則

$$\frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial t} \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} \\ \frac{\partial E_3}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ファラデーの法則

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial t} \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} \\ \frac{\partial B_3}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

さてここで, 2 次微分形式 F を

$$\begin{aligned} F = & -E_1 dt \wedge dx_1 - E_2 dt \wedge dx_2 - E_3 dt \wedge dx_3 \\ & + B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} dF = & \left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial B_3}{\partial t} \right] dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ & + \left[\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial B_1}{\partial t} \right] dt \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ & + \left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial B_2}{\partial t} \right] dt \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ & + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

となるので, $dF = 0$ で (2) と (4) を同時に表すことができる.

この時空では, スター作用素を次のように修正する

$$\begin{aligned} *(cdt) &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, & *(dx_1) &= -cdt \wedge dx_2 \wedge dx_3, \\ *(dx_2) &= -cdt \wedge dx_3 \wedge dx_1, & *(dx_3) &= -cdt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ *(cdt \wedge dx_1) &= -dx_2 \wedge dx_3, & *(cdt \wedge dx_2) &= -dx_3 \wedge dx_1, & *(cdt \wedge dx_3) &= -dx_1 \wedge dx_2, \\ *(dx_2 \wedge dx_3) &= cdt \wedge dx_1, & *(dx_3 \wedge dx_1) &= cdt \wedge dx_2, & *(dx_1 \wedge dx_2) &= cdt \wedge dx_3 \\ *(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) &= -cdt, & *(cdt \wedge dx_2 \wedge dx_3) &= -dx_1, \\ *(cdt \wedge dx_3 \wedge dx_1) &= -dx_2, & *(cdt \wedge dx_1 \wedge dx_2) &= -dx_3 \end{aligned}$$

・ t 座標には定数 c (光速) をかけ, $*$ の中に cdt があるときは 通常の場合と逆符号にする.

次に $*F$ について考えたいが, その前に 1 次微分形式 ϕ を

$$\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} dt + \mu_0(j_1 dx_1 + j_2 dx_2 + j_3 dx_3)$$

と定めておく.

$$\begin{aligned} *F &= B_1 c dt \wedge dx_1 + B_2 c dt \wedge dx_2 + B_3 c dt \wedge dx_3 \\ &\quad + \frac{E_1}{c} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{E_2}{c} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{E_3}{c} dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *\phi &= \frac{\rho}{c\varepsilon_0} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - c\mu_0(j_1 dt \wedge dx_2 \wedge dx_3 + j_2 dt \wedge dx_3 \wedge dx_1 + j_3 dt \wedge dx_1 \wedge dx_2) \end{aligned}$$

となる. すると

$$\begin{aligned} d*F &= \left[-c \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial E_3}{\partial t} \right] dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + \left[-c \left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} \right] dt \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \left[-c \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t} \right] dt \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *d*F &= \left[\left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_3}{\partial t} \right] dx_3 \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} \right] dx_1 \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} \right] dx_2 \\ &\quad - \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right) dt \end{aligned}$$

となるので $*d*F = \phi$ (あるいは $d*F = *\phi$) で (1) と (3) を同時に表すことができる.
以上から,

Maxwell 方程式 (4つの式) は 次の2つの式 にまとめられる

$$dF = 0, \quad *d*F = \phi$$

• $*\phi = d*F$ から $d*\phi = 0$ が導かれる ($d \circ d = 0$) .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} = 0$$

これは 電荷の保存則 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ を表す.

時空を $\mathbb{R}^4$ と仮定すると, $dF = 0$ なので $d\eta = F$ となる 1 次微分形式 η が存在する.
ただし η の取り方には 関数の外微分 df だけの自由度がある.

$$\eta = -\psi dt + A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$$

とおくと,

$$\begin{aligned} d\eta &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial t} \right) dt \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial t} \right) dt \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{\partial A_3}{\partial t} \right) dt \wedge dx_3 \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

式 $d\eta = F$ は, ベクトル場 $\mathbf{A}$ を想定して

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

を表している. η について

$$\begin{aligned} *\eta &= \frac{\psi}{c} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad - A_1 c dt \wedge dx_2 \wedge dx_3 - A_2 c dt \wedge dx_3 \wedge dx_1 - A_3 c dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ d*\eta &= \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right] c dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

となる. η の自由度を調節するために用いられる **ローレンツ条件** は

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0$$

と表される. これは $d*\eta = 0$ に対応する. このとき

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= (*d*d + d*d*)\eta = *d*d\eta + d*d*\eta \\ &= *d*F + d*0 \\ &= \phi \end{aligned}$$

が成り立つ. この式 $\Delta\eta = \phi$ は, ψ と $\mathbf{A}$ に関しては

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_3^2} &= \mu_0 j_k \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

を意味している.