

微分積分学 からの援用 (by 山田)

1 曲線 C : 「時刻 t ($a \leq t \leq b$) による動点の軌跡」

$$c(t) = (x(t), y(t)) \quad a \leq t \leq b$$

曲線が 滑らか とは, 各座標 $x(t), y(t)$ が t で何回でも微分可能であること. この場合で言えば

任意の自然数 n について $\frac{d^n x(t)}{dt^n}, \frac{d^n y(t)}{dt^n}$ が存在すること.

滑らかな曲線を有限個, 連続につなぎ合わせたものを 区分的に滑らか な曲線という. 線積分などで区分的に滑らかな曲線を扱うときは, “滑らかな部分に分けて和をとる” 方法を用いる.

曲線の長さの公式 「速度ベクトルの長さ を時刻にわたって積分する」

曲線 $C : c(t) = (x(t), y(t))$ ($a \leq t \leq b$) に対して

$$\text{曲線 } C \text{ の長さ} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2} dt$$

線積分 : xy 平面上で, 2つの関数 $P(x, y), Q(x, y)$ によって

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{というものの “1 次微分形式”}$$

と 曲線 $C : c(t) = (x(t), y(t))$ ($a \leq t \leq b$) に対して

$$\text{曲線 } C \text{ 上での線積分} \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

とは, 次のもののこと.

$$\int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t) \right) dt$$

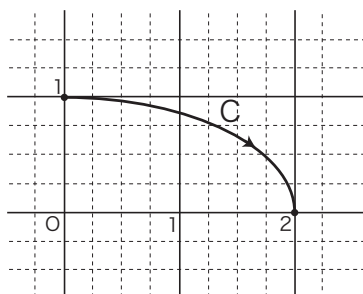
覚え方 : x, y は $x(t), y(t)$ に, $dx = \frac{dx}{dt}dt, dy = \frac{dy}{dt}dt$ で t の式に置き換え.

2 線積分の実際

例：曲線 $C : c(t) = (2t, \sqrt{1-t^2})$ ($0 \leq t \leq 1$) 上 $y^2 dx + xy dy$ の積分.

$$\int_C y^2 dx + xy dy$$

C の図がどんな様子かを考えるのは基本. この曲線は $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ をみたしているの、楕円の一部 (→別解 参照) .



$$\begin{aligned} x &= 2t, & y &= \sqrt{1-t^2} \\ dx &= 2dt, & dy &= (\sqrt{1-t^2})' dt = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^1 \left((\sqrt{1-t^2})^2 \cdot 2 + 2t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \\ &= \int_0^1 2(1-t^2) - 2t^2 dt = \int_0^1 2(1-2t^2) dt = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

[別解] C が楕円であることから $(2 \cos \theta, \sin \theta)$ ($\theta : \pi/2 \rightarrow 0$ 減少) とパラメトライズしてみると...

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \theta, & y &= \sin \theta \\ dx &= -2 \sin \theta d\theta, & dy &= \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_{\pi/2}^0 \left(\sin^2 \theta \cdot -2 \sin \theta + 2 \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \right) d\theta \\ &= \int_{\pi/2}^0 2 \left(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta \right) (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^1 2(1-t^2-t^2) dt = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

途中, $\cos \theta = t$ ($-\sin \theta = dt$) とおいた. それは... 最初の解法に戻っている!

メモ：実は、線積分は曲線 C に関しては C の“絵”自体で決まる のであり、パラメータの取り方にはよらない. ただし、向きには依存する (逆向きの曲線 $-C$ での積分は逆符号となる: $\int_{-C} \cdots = - \int_C \cdots$) .

3 完全型微分方程式

定義：微分方程式 $Q(x, y) \frac{dy}{dx} = -P(x, y)$ を

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

と書き表わす. これが次の条件をみたすとき, 完全型微分方程式 という.

(条件) $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$ をみたす関数 $F(x, y)$ が存在する.

定理： (I) 微分方程式 (1) が 完全型 であるための必要十分条件は

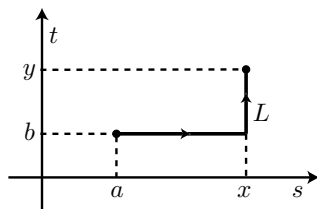
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

(II) 微分方程式 (1) が 完全型 であるとき, その解は

$$F(x, y) = C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

実際の $F(x, y)$ の計算の仕方としては.

$$(イ) \quad F(x, y) = \int_a^x P(s, b) ds + \int_b^y Q(x, t) dt \quad (a, b \text{ は任意の定数})$$



これは線積分 $\int_L P ds + Q dt$ である. 実は (I) のとき, 固定した始点 (a, b) と

終点 (x, y) に対してこの線積分は同じ値となり, 経路 (L) には依らない!

終点 (x, y) と 始点 (a, b) での “ポテンシャル F ” の差 という感じ.

また, (II) の曲線は “等 F ポテンシャル線” である.

$$(ロ) \quad F(x, y) = \int P dx - \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\int Q dy \right) dx + \int Q dy$$

4 グリーンの定理 (そのアイデア: “外微分”)

高校で習う「定積分と微分の関係」を左右を交代して書く.

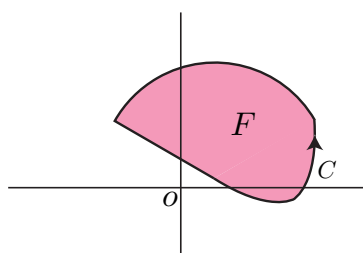
$$\left[f(x) \right]_a^b = \int_a^b f'(x) dx \quad \cdots (*)$$

左辺から右辺への変化は, (i) 関数を微分して, (ii) “内部”を埋めた範囲で積分.

上の計算では数直線上の2点 a, b の “内部”を埋めたのが $[a, b]$ とみなす.

グリーンの定理 単純 (単一) 閉曲線 C に囲まれた領域が F ($\partial F = C$)

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



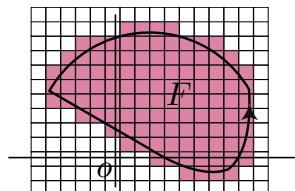
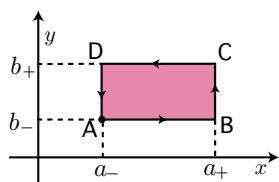
は, 次のように考えて (*) の次元を1つ上げた公式, と見なすと良い.

(i) 「 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ を $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$ にする操作」を “微分” と見なす.

(ii) C の内部 F を範囲として積分する.

実は, 上記の (i) の操作 や “ $f(x)$ を $f'(x)dx$ にする操作”, そして「完全型の微分方程式を解くのと逆の “ $F(x, y)$ から $Pdx + Qdy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$ への操作” は, 統一的に「外微分」と呼ばれる.

証明の概要 まず, 領域が長方形の場合に証明する (左図) .



積分が「“小さい長方形に分割して和をとる”操作の, 分割を細かくしていくときの極限值」として定義されることに立ち戻って証明する.

グリーンの定理の証明 まず長方形の場合に証明する（左図）．

辺 AB と 辺 CD は水平（横方向）なので dy で積分しても 0

$$\int_{AB} Q dy = 0, \quad \int_{CD} Q dy = 0$$

である．同様のことが、辺 BC と 辺 DA 上での $P dx$ についても成り立つ．

よって長方形 ABCD での線積分について、

$$\begin{aligned} \int_{ABCD} P dx + Q dy &= \left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \right) (P dx + Q dy) \\ &= \int_{AB} P dx + \int_{BC} Q dy + \int_{CD} P dx + \int_{DA} Q dy \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} \iint_{ABCD} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_{b_-}^{b_+} dy \int_{a_-}^{a_+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_{b_-}^{b_+} [Q(x, y)]_{x=a_-}^{x=a_+} dy \\ &= \int_{b_-}^{b_+} Q(a_+, y) dy - \int_{b_-}^{b_+} Q(a_-, y) dy \\ &= \int_{BC} Q(x, y) dy - \int_{AD} Q(x, y) dy \\ &= \int_{BC} Q(x, y) dy + \int_{DA} Q(x, y) dy \end{aligned}$$

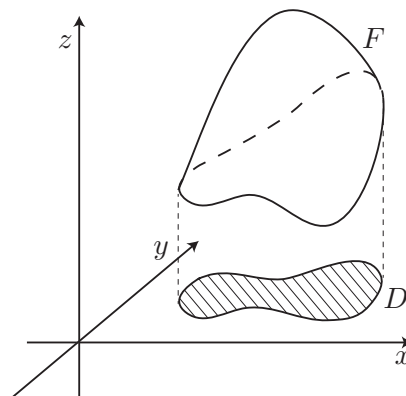
同様にして $\iint_{ABCD} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{AB} P(x, y) dy + \int_{CD} P(x, y) dy$ を得る．
これらを足せばよい．

一般の領域の場合、領域を「長方形で細かく分解して和をとったもの」とみなす（右図）．これは近似に過ぎないが、積分がそのような“分解の和”の極限として定義されることに立ち戻ることによって論理的に証明することができる． $\square$

5 曲面積

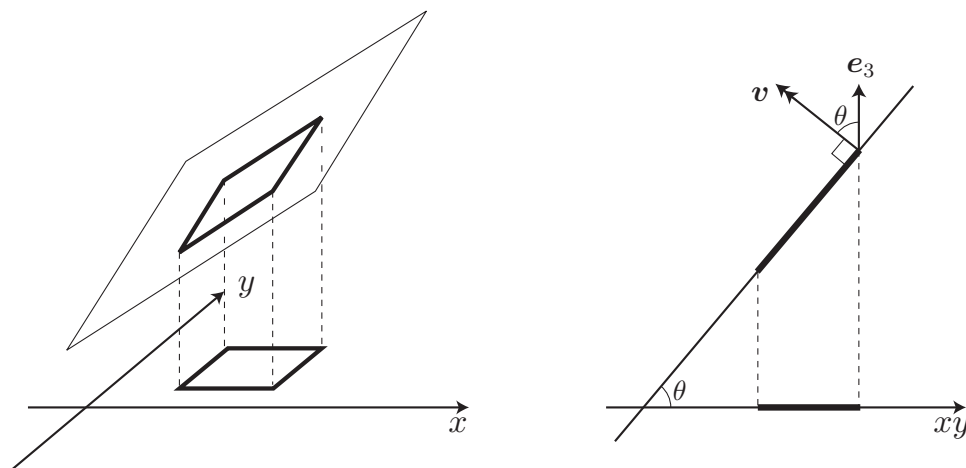
D を xy -平面内の有界な閉領域、 $f(x, y)$ を C^1 級の関数とすると、
曲面 $F: z = f(x, y) \quad ((x, y) \in D)$ の面積 $S(F)$ は

$$S(F) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$



曲面積の公式 の証明

まず $f(x, y)$ が 1 次関数 $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ の場合を考える.



この場合, F は平面 $\alpha x + \beta y - z = -\gamma$ に含まれ, その 1 つの法ベクトルは $\mathbf{v} = {}^t[\alpha, \beta, -1]$. この平面と xy 平面 (その 1 つの法ベクトルは $\mathbf{e}_3 = {}^t[0, 0, 1]$) となす角を θ ($0 \leq \theta < \pi/2$) とすると,

$$\cos \theta = \frac{|(\mathbf{v}, \mathbf{e}_3)|}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{e}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}}$$

F を xy 平面に射影したものが D になるため, この値が F の面積に対する D の面積の比である. 従って, この場合

$$S(F) = \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2} \cdot [D \text{ の面積 } \iint_D dx dy]$$

の意味で公式が成り立つ.

一般の場合, D を細分する. 点 (a, b) での $f(x, y)$ の全微分による近似

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + o$$

で, 点 (a, b) の近くでは $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ が α , $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ が β の役目を果たす. ここで, o は剰余項 “誤差” であるが, 積分 (すなわち, 細分を細かくするときの和の極限) の際に無視できることが論理的に証明できる. $\square$

グリーンの公式 練習問題

問 $P(x, y) = x^2 y^2 e^x$, $Q(x, y) = 2x^2 y e^x$ とし,

領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ とする.

領域 D は下図のようになり, ∂D は3つの有向曲線 C_1, C_2, C_3 からなる.

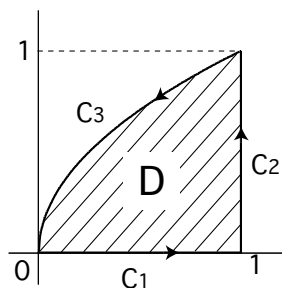
(0) [準備] $n = 1, 2, 3$ に対して $\int_0^1 t^n e^t dt$ をそれぞれ計算せよ.

答: $\int_0^1 t e^t dt = 1$, $\int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2$, $\int_0^1 t^3 e^t dt = 6 - 2e$.

(1) $f = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ とする. $f(x, y)$ を求めよ.

(2) ∂D の3分割をもとに, 線積分 $\int_{\partial D} P dx + Q dy$ を計算せよ.

(3) $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ を計算せよ.



	$P dx$	$Q dy$
C_1		
C_2		
C_3		

(合計) $\int_{\partial D} P dx + Q dy =$ _____

答: $f = 4xye^x$, (2) も (3) も $2e - 4$

1 次微分形式 練習問題

復習（予習を兼ねて）

問1 xy -平面内で、関数 f と 有向曲線 C を次で定める：

$$f(x, y) = x^4 - x^2y + y^2, \quad C : \begin{array}{ll} [0, 4] & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (x(t), y(t)) = (\sqrt{t}, t^2). \end{array}$$

(1) f の偏微分 $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ および $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ.

(2) C 上の線積分 $\int_C Pdx + Qdy$ を求めよ.

(3) C の始点 O と終点 $A(2, 16)$ での $f(x, y)$ の値の差 $f(2, 16) - f(0, 0)$ を求めよ.

$Pdx + Qdy$ が 完全型 の場合には...

答：208

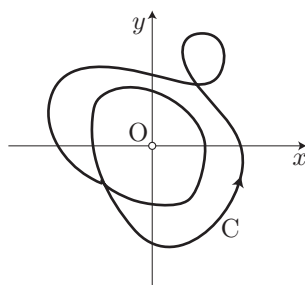
問2 xy -平面から 原点を除いた部分 で、有向閉曲線 C （始点と終点と同じ曲線を閉曲線 という）に対して 積分値

$$I(C) = \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

を考える. 極座標変換 を使って、以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C_0 が単位円 $((\cos t, \sin t) : 0 \leq t \leq 2\pi)$ の場合に、値 $I(C_0)$ を求めよ.

(2) 曲線 C が下図のような曲線の場合に その値 $I(C)$ を求めよ.



実は、図から “読み取る” ことができます.

答：(1) 2π , (2) 4π