応用幾何学　資料R

線形といえば (by 山田)

「線形○○」「１次○○」と言ったら、

足し算（＋）と スカラー倍 について何か条件を課した

と心得るべし．教科書の索引を使って, いろいろな用語の意味（課した条件）を調べよ．ここではいくつかまとめておく．以下では V, W などは空集合ではないとする．

$\boxed{1}$ V を $\mathbb{R}^n$（n 次元数ベクトル空間）とする．次の２つの 演算 に注目する．

(1)　和 が定義されている．つまり

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$$

「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が V に属すならば, **和** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ も V に属す」

厳密に数式記号を用いると　$\forall \boldsymbol{a}, \forall \boldsymbol{b} \in V \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$　であるが,「$\Rightarrow$ “ならば”」は “である全ての場合に ” と解釈して通常「$\forall$ “任意の”」は省略される．以下では全て省略形で述べる．

(2)　スカラー倍 が定義されている．つまり

$$k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in V \quad \Rightarrow \quad k\boldsymbol{a} \in V$$

(1+2：合わせ技)　V 内で１次結合が定義される．つまり

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V \quad \Rightarrow \quad k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \in V$$

・$k_1 = k_2 = 1$ にすれば 条件 (1) を, $k_2 = 0$ にすれば 条件 (2) を導く．

● ２つの演算 “足し算” と “スカラー倍” を定義された集合を **線形空間** という．

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の **1次結合** であるとは,

n 個のスカラー $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が存在して
$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ と表わされること．

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の **1次関係式** とは, それらの１次結合で $\boldsymbol{0}$ を表す

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

の形の式のこと．すべての係数 c_i が 0 のとき「自明な１次関係式」という．
逆に, 少なくとも１つの係数が 0 でないとき「非自明な１次関係式」という．

$\boxed{4}$（V 内で）ベクトルの集合 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が **1 次独立** であるとは,

「『$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ ならば $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ 』が成り立つ」こと

言い換えると

「$c_1 = \cdots = c_r = 0$ 以外では $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ は成り立たない」こと

を表す. スカラーの 0 in $\mathbb{R}$ とゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ in V の区別に注意. 1 次独立でないことを 1 次従属という. つまり, r 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が **1 次従属** であるとは,

「$c_1 = \cdots = c_r = 0$ 以外で $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$
となる係数 $c_1, c_2, \cdots, c_r$ が存在する」こと

を表す. つまり「非自明な 1 次関係式が存在する」ことを表す.

$r = 2$（2 個 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$）のとき：

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が 1 次従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ または $\exists c,\ \boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$（平行）.

$r = 3$（3 個 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$）のとき： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属 となるのは,

- 3 つのうち 少なくとも 1 つが $\boldsymbol{0}$,
- 3 つのうち ある 2 つ または 3 つ全て が平行,
- $\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ の形の関係式が成り立つ,

のいずれかの場合であるが, “場合”で説明するのは面倒.

例 1 ： $\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ の 3 つは 1 次独立. なぜなら

$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を解くと $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となるため.

例 2 ： $\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}5\\3\\1\end{bmatrix}$ の 3 つは 1 次従属. なぜなら

非自明な 1 次関係式 $-7\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^n$ 内の（or 線形空間 V の）空でない部分集合 W が V の**線形部分空間**
であるとは, 次の 3 条件が成り立つこと

(0) $\boldsymbol{0} \in W$

(1) W が 和 に関して閉じている. つまり $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(2) W が スカラー倍 に関して閉じている. つまり $k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in W$

(1+2：合わせ技) W が 1 次結合に関して閉じている. つまり

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W \quad \Rightarrow \quad k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 \in W$$

例 1 ： $V=\mathbb{R}^n$ とする. $m\times n$ 行列 A に対して, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解の集合
$N(A)=\{\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる.
これを「$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の**解空間**」という .

例 2 ： $V=\mathbb{R}[x]_n$（n 次以下の多項式のなす線形空間）のとき $\alpha\in\mathbb{R}$ に対し
$X_\alpha:=\{\,f\in\mathbb{R}[x]_n\,|\,f(\alpha)=0\,\}$ とする.　X_α は $\mathbb{R}[x]_n$ の部分空間である.

$\boxed{6}$ V 内で $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ が **生成する**部分空間（**張られる**部分空間）
（記号は $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\rangle$）とは, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合の集合, つまり

$$\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\rangle=\{\,c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{a}_r\,|\ \text{各 } c_i\in\mathbb{R}\,\}.$$

「$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ が V を**生成する**」とは　$\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\rangle=V$, つまり
「V に属す任意のベクトルが $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ の 1 次結合で表される」こと.

・$m\times n$ 行列 A の列ベクトル分割 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$ に対して

$$C(A)=\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\rangle$$

は $\mathbb{R}^m$ の部分空間であり「A の**列空間**」という.

$\boxed{7}$ 線形空間の **基底** と **次元**.
線形空間 V の中の有限個のベクトルの組 $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$ が ,

(1) V を生成し　　なおかつ　　(2) 1 次独立

のとき, $\mathcal{B}$ を V の <u>基底</u> という. 実は, 次のことが成り立つ.

定理 ：　線形空間 V が, 有限個のベクトルからなる基底をもつ
とき, 基底の取りかた は何通りもあるが,
基底をなす ベクトル <u>の個数</u> は変化しない.

そこで, この「ベクトルの個数」を V の**次元**（$\dim V$）という.

（　0 次元 は点,　1 次元 は線,　2 次元 は面,　3 次元 は空間, ...　）

例： $V=\mathbb{R}^n$（次元は n）のとき, $\boldsymbol{e}_i$ を「i 番目のみ 1 で他が全て 0 のベクトル」
とすると $\mathcal{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の**標準基底** と呼ばれる.

$$\mathbb{R}^3 \text{ の標準基底：}\quad \left\{\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$\boxed{8}$ V, W は線形空間とする. **写像** $f : V \to W$ **が線形写像**であるとは, f が次の条件をみたすこと

(1) f は $\underline{\text{和}}$ を保つ. つまり「和の像は像の和」$+$ が外に出せる.

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \quad \text{in } W$$

左辺の $+$ は V 内の和, 右辺の $+$ は W 内の和, 同じものではない.

(2) f は $\underline{\text{スカラー倍}}$ を保つ. つまり「k 倍の像は像の k 倍」定数倍が外に出せる.

$$f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a}) \quad \text{in } W$$

(1+2：合わせ技) ： f は 1 次結合を保つ.

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2) = k_1 f(\boldsymbol{a}_1) + k_2 f(\boldsymbol{a}_2) \quad \text{in } W$$

例 1 ： 行列の定める写像. $m \times n$ 行列 A に対して

$$\begin{array}{cccc} f_A : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \boldsymbol{x} & \mapsto & \boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}. \end{array}$$

例 2 ： 微分

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{d}{dx} : & C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \dfrac{df}{dx}. \end{array}$$

$(f+g)' = f' + g'$ 　や　 $(cf)' = cf'$ （$c \in \mathbb{R}$） 　と習っただろう.

$\boxed{\text{線形空間の例}}$ — $\mathbb{R}^n$ だけではない —

２つの演算 “和” と “スカラー倍” を定義された集合を **線形空間** という.

例１：平面や空間のベクトルの集合としての $\mathbb{R}^2$（２次元）, $\mathbb{R}^3$（３次元）,
それらの一般化としての $\mathbb{R}^n$（n 次元）.

例２：x に関する n 次以下の多項式の集合
$\mathbb{R}[x]_n = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ （$n+1$ 次元）.

例３：$m \times n$ 行列の集合 $M_{m\times n}$（mn 次元）.

例４：$\mathbb{R}$ 上の C^∞（あるいは C^n）級関数の集合 $C^\infty(\mathbb{R}), C^n(\mathbb{R})$,（次元は無限）.

「線形○○」「１次○○」のような用語は 本来, 一般の 線形空間 について定義される.

空間図形：直線と平面

直線の式：　点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通る, 方向ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ の直線の式

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

ただし v_1, v_2, v_3 の中に 0 がある場合は式を変形する.
（例 $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-6}{3}$　とはせず　$\frac{x-4}{1} = \frac{z-6}{3}$, $y = 5$ とする.）
注意：見かけの違う式が同じ直線を表すことがある.

考え方：　$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\boldsymbol{v} \quad (t \in \mathbb{R})$　と表せる点 $X(x, y, z)$ の集合と考える.

平面の式：　点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を含む, 法線ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ の平面の式

$$v_1(x-a_1) + v_2(y-a_2) + v_3(z-a_3) = 0$$

変形すると　$v_1x + v_2y + v_3z = v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3$

左辺は 1 次式で，右辺は定数.

考え方：　$\boldsymbol{v} \perp \overrightarrow{\mathrm{AX}}$　つまり　$\boldsymbol{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AX}} = 0$　となる点 $X(x, y, z)$ の集合と考える.

点と平面の距離の公式：点 (x_0, y_0, z_0)　と　平面 $ax + by + cz = d$　との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

考察：点が平面上にあれば距離は 0. 公式の分子が 0 になることと対応している.

チェック項目

(A1) ３点を含む平面の式を求める.
(A2) 交わる平面と直線の式が与えられたとき, 交点の座標を得る.
(A3) 直線の式とその上にない点の座標が与えられたとき,
　それらを含む平面の式を得る.
(A4) 交わる２直線の式が与えられたとき, 交点の座標を得る.
(A5) 交わる２平面の式が与えられたとき, 交線の式を得る.
(A6) 交わる２直線 あるいは 平行な２直線の式が与えられたとき,
　それらを含む平面の式を得る.

(B1) ２つの直線の式が与えられたとき, 位置関係を判断する.
　一致 / 平行 / 交わる / ねじれの位置

(B2) ２つの平面の式が与えられたとき, 位置関係を判断する.
　一致 / 平行 / 交わる
(B3) 直線の式と平面の式が与えられた時, 位置関係を判断する.
　含まれる / 平行 / 交わる

(C1) 点の座標と直線の式から「点と直線の距離」を求める.
(C2) 点の座標と平面の式から「点と平面の距離」を求める.
(C3) 平行な２直線 または ２平面の式から, その「幅」を求める.
(C4) ねじれの位置の２直線の式から「最短距離」を求める.
(C5) 交わる 直線と平面 の式から, その 直線と平面のなす角 を求める.
(C6) 交わる２平面の式から, その ２平面のなす角 を求める.

(D) ねじれの位置の２直線の式から「最短距離を与える２点」の座標を求める.

練習問題：xyz-空間内で, 点の座標 や 直線・平面の式を次の通りとする.

点 A： $(4,-7,0)$

直線 l： $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-6}{3}$　　m_1： $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-3}{-6}$

m_2： $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z-8}{1}$　　m_3： $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-4}{1}$

平面 α： $x-2y+3z=6$　　β： $x-y-z=-11$

γ_1： $2x-4y+6z=6$　　γ_2： $2x-4y+6z=12$

(a2) 直線 l と平面 α の交点の座標を求めよ.
(a3) 直線 l と点 A を含む平面の式を求めよ.
(a4) 交わる２直線 l と m_2 の交点の座標を求めよ.
(a5) 交わる２平面 α と β の交線の式を求めよ.
(a6) 交わる２直線 l と m_2 を含む平面の式を求めよ.
(b1) 直線の組４種類：l と m_1 / m_2 と m_3 / m_1 と m_2 / m_1 と m_3 / の位置関係を述べよ.
(b2) 平面の組３種類：α と β / α と γ_1 / α と γ_2 / の位置関係を述べよ.
(b3) 直線と平面の組３種類： l と α / m_2 と β / m_3 と β / の位置関係を述べよ.
(c1) 点 A と 直線 l の距離を求めよ.
(c2) 点 A と 平面 α の距離を求めよ.
(c3) 平行な２直線 m_2 と m_3, また 平行な２平面 γ_1 と γ_2 の幅を求めよ.
(c4) ねじれの位置の２直線 l と m_3 の間の最短距離を求めよ［外積を用いるのが早い］
(c5) 交わる２平面 α と β のなす角を求めよ.
(c6) 直線 l と平面 α のなす角を φ_1 とするとき $\cos\varphi_1$ を求めよ.
　直線 l と平面 β のなす角を φ_2 とするとき $\cos\varphi_2$ を求めよ.
(d) ねじれの位置の２直線 l と m_3 について最短距離を与える２点の座標を求めよ.

外積（ベクトル積） (by 山田)

1 定義　$\mathbb{R}^3$ の２つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して，次のベクトルを

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積） とよび $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と表す．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \quad = \quad \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

覚え方
$$\begin{array}{ccl} a_1 & b_1 & \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdot(3) \\ a_2 & b_2 & \\ & & \cdots(1) \\ a_3 & b_3 & \\ & & \cdots\cdots(2) \\ a_1 & b_1 & \end{array}$$

例：$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{bmatrix}$.

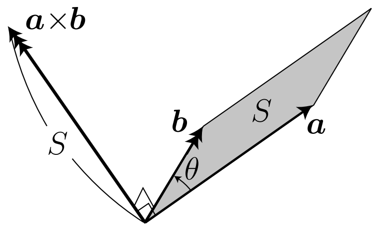
2 幾何的性質

(1)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の**方向**は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交する．

(2)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の**長さ**は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで定まる平行四辺形の面積である．

(3)　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の**向き**は，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ がこの順に 右手系．

この３つの性質で $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は特徴つけられる．



3 公式

(1) [線形性]
$$\begin{aligned} (c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2) \times \boldsymbol{b} &= c_1(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{b}) + c_2(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{b}). \\ \boldsymbol{a} \times (d_1 \boldsymbol{b}_1 + d_2 \boldsymbol{b}_2) &= d_1(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_1) + d_2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_2). \end{aligned}$$

(2) [交代性]　$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.　　特に，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

(3) [ラグランジュの公式]　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 \quad = \quad \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle^2 \quad = \quad (\|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta)^2.$$

(4) [結合法則をみたさない]　一般に　$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

例：$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 一方 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

外積 の利用例

【問１】 (a1) ３点 $A(1,0,0),\quad B(0,2,0),\quad C(0,0,3)$ 　を含む平面の式を求めよ．

解説：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\2\end{bmatrix}$ が 法ベクトル（の１つ）で，点 A を通っているから　$6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0.$ 　整理して　$6x+3y+2z=6.$ (答)

この平面の式は $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ と表示しておくと確認しやすい. (図を描いてみよ.)

【問２】 (c4) ねじれの２直線 l と m の最短距離を求めよ．

$$l:\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-6}{3},\qquad m:\frac{x}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-4}{1}$$

解説：最短距離を与える l,m 上の点を求めなくて良い場合は, 次の方法が早い.

(1) m を含み, l と平行な平面 α の式を求める.

(2) l 上の点と平面 α の距離を求める.

(1) 平面 α の法ベクトルは，２直線 l,m の方向ベクトル $\vec{v}_l,\vec{v}_m$ のどちらとも垂直.
そのようなベクトルは外積で求められる：　$\vec{v}_l\times\vec{v}_m=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\\-3\end{bmatrix}.$

α は m を含み m 上に点 $(0,-4,4)$ があるので α の式は

$$-(x-0)+5(y+4)-3(z-4)=0,\quad \text{整理して}\quad x-5y+3z=32.$$

(2) l 上に 点 $(4,5,6)$ があるので l から α への距離は

$$\frac{|4-5\cdot5+3\cdot6-32|}{\sqrt{1^2+(-5)^2+3^2}}=\sqrt{35}.\qquad \text{(答)}$$

【問３】 (a5) ２平面 α と β の交線 l を求めよ．

$$\alpha:x-2y+3z=6,\qquad \beta:x-y-z=-11$$

解説：求める交線 l の方向ベクトル $\vec{v}$ は，２平面の法ベクトルの両方に垂直.
外積で求められる：

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}$$

l は 平面 α,β の両方に属す点 $(-28,-17,0)$ を通る, 方向ベクトル $\vec{v}$ の直線

$$l:\frac{x+28}{5}=\frac{y+17}{4}=\frac{z}{1}.\quad \text{(答)}$$

注：連立方程式　$\begin{cases}x-2y+3z=6\\x-y-z=-11\end{cases}$ 　の解が $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-28\\-17\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}$ であることと対応.