

双対空間 (dual space) (by 山田)

n 次元線形空間 V に対して、次の集合を V の**双対空間**とよび V^* で表す.

$$V^* := \{ V \text{ から } \mathbf{R} \text{ への線形写像} \}.$$

ただし $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ が線形写像であるとは、次の2条件が成り立つことである.

$$(1) f \text{ は和を保つ: } f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$(2) f \text{ はスカラー倍を保つ: } f(c\vec{u}) = cf(\vec{u})$$

この2条件を合わせた次の条件で理解しても良い.

$$(1+2) f \text{ は一次結合を保つ: } f(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2) = c_1f(\vec{u}_1) + c_2f(\vec{u}_2)$$

事実. V^* は n 次元 (V と同じ次元) の線形空間となる.

V^* 上の 和とスカラー倍 は次のように定義する.

$$(1) f, g \in V^* \text{ のとき「} f \text{ と } g \text{ の和」 } (f + g) \in V^* \text{ は}$$

$$(f + g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}).$$

$$(2) f \in V^*, c \in \mathbf{R} \text{ のとき「} f \text{ の } c \text{ 倍」 } (cf) \in V^* \text{ は}$$

$$(cf)(\vec{u}) = cf(\vec{u}).$$

この2条件を合わせると、次を得る：

$$(1+2) f_1, f_2 \in V^* \text{ と } c_1, c_2 \in \mathbf{R} \text{ に対して一次結合 } (c_1f_1 + c_2f_2) \in V^* \text{ は}$$

$$(c_1f_1 + c_2f_2)(\vec{u}) = c_1f_1(\vec{u}) + c_2f_2(\vec{u}).$$

さて、 V の基底 $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を1つ固定する. V^* の元 f は基底の各ベクトルに対する値 $f(\mathbf{e}_1) = a_1, f(\mathbf{e}_2) = a_2, \dots, f(\mathbf{e}_n) = a_n$ が与えられれば

$$f(c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \dots + c_n\mathbf{e}_n) = c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n$$

となり、「 V の各ベクトルに対する f の像」つまり写像 f 自体が定まる.

今、 V の基底 $\mathcal{B}$ に対して V^* の元 $\mathbf{e}_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

つまり「 V のベクトルに対して, その $\mathbf{e}_i$ の係数を取り出す写像」

$$\mathbf{e}_i^*(c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n) = c_i$$

と定めると, $\{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*\}$ は V^* の基底となることがわかる. これを $\mathcal{B}$ の双対基底とよび, $\mathcal{B}^*$ と表す (与えられた $\mathcal{B}$ に対して定められていることに注意):

$$\mathcal{B}^* := \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \dots, \mathbf{e}_n^*\}.$$

双対基底の基底変換 次に V の基底変換行列と, それに伴う V^* の双対基底の基底変換行列との関係を考えておく. $n = 2$ の場合で考える.

$\mathcal{B}_a := \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\mathcal{B}_b := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ を V の 2 組の基底とし, $\mathcal{B}_a$ から $\mathcal{B}_b$ への基底変換行列を A とする. つまり

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = a_{11}\mathbf{a}_1 + a_{21}\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 = a_{12}\mathbf{a}_1 + a_{22}\mathbf{a}_2 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

行列の積の計算法を応用して, この関係を次のように表示することにする:

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{を意図して} \quad \mathcal{B}_b = \mathcal{B}_a A \quad \cdots (1)$$

この転置をとれば ${}^t(\mathcal{B}_b) = {}^tA {}^t(\mathcal{B}_a)$. (一般に ${}^t(XY) = {}^tY {}^tX$ であることに注意)

さらに, V の基底 $\mathcal{B}_a$ と V^* の双対基底 $\mathcal{B}_a^*$ の関係を, 次のように表示することにする:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^*(\mathbf{a}_1) & \mathbf{a}_2^*(\mathbf{a}_1) \\ \mathbf{a}_1^*(\mathbf{a}_2) & \mathbf{a}_2^*(\mathbf{a}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{を意図して} \quad {}^t(\mathcal{B}_a) \cdot \mathcal{B}_a^* = I \quad \cdots (2)$$

(転置をとれば ${}^t(\mathcal{B}_a^*) \cdot \mathcal{B}_a = I$) . 同様に, V の基底 $\mathcal{B}_b$ と V^* の基底 $\mathcal{B}_b^*$ の関係は

$${}^t(\mathcal{B}_b) \cdot \mathcal{B}_b^* = I \quad \cdots (3)$$

(3) 式と (1) 式 から ${}^tA {}^t(\mathcal{B}_a) \cdot \mathcal{B}_b^* = I$. 両辺に左から $({}^tA)^{-1}$, 右から tA をかけて ${}^t(\mathcal{B}_a) \cdot \mathcal{B}_b^* {}^tA = I$. これと (2) 式 を比べて $\mathcal{B}_a^* = \mathcal{B}_b^* {}^tA$ を得る. この式は $\mathcal{B}_b^*$ から $\mathcal{B}_a^*$ への基底変換行列が tA であることを示している. 以上から,

定理. V の 2 組の基底 $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ とその双対基底 $\mathcal{B}_a^*, \mathcal{B}_b^*$ に対して,

$\mathcal{B}_a$ から $\mathcal{B}_b$ への基底変換行列を A とすると,

$\mathcal{B}_b^*$ から $\mathcal{B}_a^*$ への基底変換行列は tA である.

外積代数 (exterior algebra) (by 山田)

n 次元線形空間 V に対して, V の r 次 外積代数 $\wedge^r V$ とは

$$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_r \quad (\text{各 } \mathbf{v}_i \in V)$$

の形の元を基底とする一次結合の集合に, 次のような同一視と計算を導入した集合である.

(1) **多重線形** 各成分についての線形性.

$$\cdots \wedge (\alpha \mathbf{v}_i + \beta \mathbf{u}_i) \wedge \cdots = \alpha (\cdots \wedge \mathbf{v}_i \wedge \cdots) + \beta (\cdots \wedge \mathbf{u}_i \wedge \cdots)$$

(2) **交代性** 1 組交換すると (-1) 倍

$$\cdots \wedge \mathbf{v}_i \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_j \wedge \cdots = (-1) \cdots \wedge \mathbf{v}_j \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_i \wedge \cdots$$

$$\text{例: } \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 = -(\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_1 = -(\mathbf{v}_3 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1).$$

特に, 同じベクトルが含まれているものは $\mathbf{0}$ ($\wedge^r V$ の中での) とみなす.

$$\cdots \wedge \mathbf{v} \wedge \cdots \wedge \mathbf{v} \wedge \cdots = \mathbf{0}.$$

$\wedge^r V$ は ${}_nC_r := \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 次元の線形空間である. V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を 1 つ固定すれば, $\wedge^r V$ の基底として,

$$\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_r} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n)\}$$

がとれる. $\wedge^0 V = \mathbf{R}$, $\wedge^1 V = V$. また $r > n = \dim V$ のとき $\wedge^r V = \{\mathbf{0}\}$ とする. $\wedge^n V$ は 1 次元で $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$ が基底となる:

$$\wedge^n V = \langle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \rangle.$$

計算例

$$\begin{aligned} (a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) \wedge (c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) &= ac(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + ad(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + bc(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + bd(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= \mathbf{0} + ad(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) - bc(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + \mathbf{0} \\ &= (ad - bc)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

積の交換性 $v \in \wedge^i V$, $w \in \wedge^j V$ のとき, $v \wedge w, w \wedge v \in \wedge^{i+j} V$ で,

$$w \wedge v = (-1)^{ij} v \wedge w$$

幾何学では V よりも, その双対空間 V^* の外積代数 $\wedge^r V^*$ (xy -平面上の $dx \wedge dy$ 等) が重要となる.

V を n 次元線形空間とし, 基底 $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ をとる.

通常, 添字集合を表す

$$I_r = \{(i_1, i_2, \dots, i_r) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}$$

を準備して, r 次外積代数 $\wedge^r V$ ($1 \leq r \leq n$) の元 w を

$$w = \sum_{(i_1, \dots, i_r) \in I_r} a_{i_1, \dots, i_r} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_r}$$

のように表す. ここで 各 $a_{i_1, \dots, i_r} \in \mathbf{R}$.

定義 [コベクトルの r 次外積への r 個のベクトル列の代入]

- w が 1 つの項からなるとき

$w = \mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^* \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_r^*$ への $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$ の代入を

$$w(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r) = (\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_2^* \wedge \dots \wedge \mathbf{w}_r^*)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^*(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_1^*(\mathbf{v}_2) & \dots & \mathbf{w}_1^*(\mathbf{v}_r) \\ \mathbf{w}_2^*(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_2^*(\mathbf{v}_2) & & \\ \vdots & & \mathbf{w}_i^*(\mathbf{v}_j) & \vdots \\ \mathbf{w}_r^*(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_r^*(\mathbf{v}_2) & \dots & \mathbf{w}_r^*(\mathbf{v}_r) \end{bmatrix}$$

と定める.

- w が複数の項からなるとき, 各々の項に対する値の和とする.

計算例

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*)(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^*(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) & \mathbf{e}_1^*(c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_2^*(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) & \mathbf{e}_2^*(c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc. \end{aligned}$$

2 次微分形式は “面積を測る”

多重線形性, 交代性を使って ω を変形しても値は変わらない. 外積代数の定義 (多重線形性, 交代性) は, 行列式の性質を反映するため.

定義: r 次微分形式 (Differential r -form)

「各点で コベクトルの r 次外積代数 が指定されていること」に対応する概念

$$\text{表示法 } \omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r) \in I_r} X_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \quad (\text{各 } X_{i_1, \dots, i_r} \text{ は関数})$$

を r 次微分形式という. r 次微分形式には, 始点の同じ r 個のベクトル列を代入することができる $\omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$.

定義：微分形式の外微分

スカラー場（関数） $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の外微分は

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n$$

であった。これを 0 次の微分形式の外微分とみなし、高次の微分形式に拡張する。

r 次微分形式

$$\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r) \in I_r} X_{i_1, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

に対して、 $(r+1)$ 次微分形式

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{(i_1, \dots, i_r) \in I_r} \frac{\partial X_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$$

を対応させる操作 d を 外微分 という。

計算例（1） $n=2, r=1$

1 次微分形式 $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ （略して $Pdx + Qdy$ ）に対して

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Pdx + Qdy) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

— 「グリーンの公式」で見た形。

計算例（2） $n=3, r=1$

1 次微分形式 $\omega = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$
（略して $Xdx + Ydy + Zdz$ ）に対して

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Xdx + Ydy + Zdz) \\ &= \dots \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

— ベクトル解析の rot の形。

外微分の性質

・ ξ が i 次微分形式、 η が j 次微分形式 のとき

$$d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta + (-1)^i \xi \wedge (d\eta)$$

・ 2 回外微分すると消える： $\boxed{d \circ d = 0}$

以下では、線形空間 V としては内積を指定されたもの（内積空間）を考え、基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ は正規直交基底であるとする。

定義：スター作用素（* operator）

n 次元線形空間 V に対して $\wedge^p V$ から $\wedge^{n-p} V$ への線形写像

$$* : \wedge^p V \rightarrow \wedge^{n-p} V$$

を、次のように構成することができる。

- $*(1) = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n$ • $*(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n) = 1$, および
- $r + s = n$ で $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s$ が $1, 2, \dots, n$ の偶 (+) / 奇 (-) 置換の順列のとき

$$*(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_r}) = \pm \mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_s}$$

- 1 次結合に関しては線形に拡張する。

例： $n = 4$ のとき： $\wedge^0 V, \wedge^1 V, \wedge^2 V, \wedge^3 V, \wedge^4 V$ はそれぞれ 1, 4, 6, 4, 1 次元で、

$$\begin{aligned} *(1) &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, & *(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, & *(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, \\ & & *(\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, & *(\mathbf{e}_4) &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4, & *(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4, & *(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \\ *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) &= -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4, & *(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4) &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, & *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4) &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_4, & *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4) &= -\mathbf{e}_3, & *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) &= 1. \\ *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) &= \mathbf{e}_2, & *(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) &= -\mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} &*(\alpha_{12}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_{34}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + \alpha_{13}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_{24}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + \alpha_{14}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4) \\ &= \alpha_{12}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + \alpha_{23}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 - \alpha_{34}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - \alpha_{13}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 - \alpha_{24}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_{14}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &= -\alpha_{34}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \alpha_{14}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \alpha_{12}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 - \alpha_{24}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - \alpha_{13}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + \alpha_{23}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

となる。

性質： $** = (-1)^{p(n-p)} : \wedge^p V \rightarrow \wedge^p V$

外積空間の内積： * によって V の内積が自然に $\wedge^p V$ の内積を定める。

$$(v, w) := *(v \wedge *w) \quad v, w \in \wedge^p V$$

スター作用素は、次の例のように微分形式に対しても拡張される。

[$n = 3$ の場合] X, Y, Z は関数 ($X = X(x, y, z)$ 等)

$$*(Xdx + Ydy + Zdz) = Xdy \wedge dz + Ydz \wedge dx + Xdx \wedge dy$$

$$*(Xdy \wedge dz + Ydz \wedge dx + Xdx \wedge dy) = Xdx + Ydy + Zdz.$$