積分定理の計算例　(by 山田)

発散定理の確認

曲面（放物面）$z = 4 - x^2 - y^2$ と平面 $z = 2x$ に囲まれた領域を V,

ベクトル場　$\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ -y+2z \end{bmatrix}$　とする. 発散定理

$$\int_V \mathrm{div}\ \overrightarrow{X} dv = \int_{\partial V} \overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を, 両辺を計算することで確認せよ.

準備：領域 V について調べる.
$4 - x^2 - y^2$ と $2x$ の大小を比較して "挟まれている部分" を探す.

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 2x \end{cases}, \qquad 4 - x^2 - y^2 = 2x, \quad (x+1)^2 + y^2 = 5$$

から, V は　$2x \leq z \leq 4 - x^2 - y^2;\ (x+1)^2 + y^2 \leq 5.$

V の境界 ∂V は

放物面 S_1：　$z = 4 - x^2 - y^2, \quad D = \{(x+1)^2 + y^2 \leq 5\}$
平面 S_2：　$z = 2x, \quad D = \{(x+1)^2 + y^2 \leq 5\}$

の２つの曲面からなる. D は中心 $(-1, 0)$ 半径 $\sqrt{5}$ の円板なので
$(r\cos\theta - 1, r\sin\theta)$ と変換し, $E = \{0 \leq r \leq \sqrt{5},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とする.

V の体積を求めておく

$$\begin{aligned} \int_V dv &= \iint_D (4 - x^2 - y^2) - 2x\,dxdy = \iint_E (5 - r^2)\,r\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} (5 - r^2)\,r\,dr = \cdots = \frac{25\pi}{2} \end{aligned}$$

［左辺］div $\overrightarrow{X} = 4.$

$$\int_V \mathrm{div}\ \overrightarrow{X} dv = \int_V 4\,dv = 4\int_V dv = \underline{50\pi}.$$

［右辺］２つの曲面 S_1 と S_2 に分けて計算する

・S_1 での積分．座標として　$\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,4-x^2-y^2);\ (x,y)\in D.$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2x\end{bmatrix},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\begin{bmatrix}0\\1\\-2y\end{bmatrix},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\begin{bmatrix}2x\\2y\\1\end{bmatrix},$$

向きの確認：V から出て行くのは z-成分が正．この向きでよい．

$$\overrightarrow{X}\text{ at }\boldsymbol{r}(x,y)=\begin{bmatrix}x\\x+y\\-y+2(4-x^2-y^2)\end{bmatrix},\quad d\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}2x\\2y\\1\end{bmatrix}dxdy,$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S} &= \{x\cdot 2x+(x+y)\cdot 2y-y+2(4-x^2-y^2)\}dxdy\\ &= (2xy-y+8)dxdy\\ \int_{S_1}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D(2xy-y+8)dxdy\\ &= \iint_E(2r^2\cos\theta\sin\theta-2r\sin\theta+8)r\,drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{5}}8r\,dr\ =2\pi\cdot 20=40\pi\end{aligned}$$

注意：$\sin\theta\cos\theta,\ \sin\theta,\ \cos\theta$ は, 0 から 2π まで積分すると 0 なので計算を省略できる．

・S_2 での積分．座標として　$\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,2x);\ (x,y)\in D.$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},$$

向きの確認：V から S_2 を通って出て行くのは z-成分が負．この向きと逆向き．

$$\overrightarrow{X}\text{ at }\boldsymbol{r}(x,y)=\begin{bmatrix}x\\x+y\\-y+4x\end{bmatrix},\quad d\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}dxdy,$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S} &= \{x\cdot(-2)+0-y+4x\}dxdy\ =(2x-y)\,dxdy\\ \int_{S_2}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D(2x-y)\,dxdy\ =\iint_E\{2(r\cos\theta-1)-r\sin\theta\}r\,drd\theta\\ &= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{5}}2r\,dr\ =-2\pi\cdot 5=-10\pi\end{aligned}$$

以上から（∂V の向き（特に S_2 の向き）に注意して）

$$\int_{\partial V}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S}\ =\int_{S_1}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S}-\int_{S_2}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S}\ =40\pi-(-10\pi)=\underline{50\pi}.$$

Stokes の定理の確認

曲面（放物面）$z = 4 - x^2 - y^2$; $(x+1)^2 + y^2 \leq 5$ を S とする.

ベクトル場　$\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ -y+2z \end{bmatrix}$　とする. Stokes の定理

$$\int_S \mathrm{rot}\overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S} \overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を, 両辺を計算することで確認せよ.

曲面 S の境界 $\partial S = C$ について調べる. $D = \{(x,y); (x+1)^2 + y^2 \leq 5\}$ とおく.
D は中心 $(-1,0)$ 半径 $\sqrt{5}$ の円板. その境界 ∂D は, 中心 $(-1,0)$ 半径 $\sqrt{5}$ の円周 $(\sqrt{5}\cos t - 1, \sqrt{5}\sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

$$z = 4 - (\sqrt{5}\cos t - 1)^2 - (\sqrt{5}\sin t)^2 = 2\sqrt{5}\cos t - 2.$$

このことから, 向きにも気をつけて, 曲線 C のパラメータを得る.

$$C : (\sqrt{5}\cos t - 1, \sqrt{5}\sin t, 2\sqrt{5}\cos t - 2)$$

［左辺］

$$\mathrm{rot}\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ -y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

S の座標として　$\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

向きの確認：z-成分が正. この向きでよい.

$$\mathrm{rot}\overrightarrow{X} \text{ at } \boldsymbol{r}(x,y) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{bmatrix} dxdy.$$

D を $(r\cos\theta - 1, r\sin\theta)$ と変換し, $E = \{0 \leq r \leq \sqrt{5},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とする.

$$\mathrm{rot}\overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; (-2x+1)\, dxdy$$

$$
\begin{aligned}
\int_S \mathrm{rot}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D (-2x+1)\,dxdy \\
&= \iint_E (-2r\cos\theta+3)r\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{5}} 3r\,dr \ = 2\pi\cdot\frac{15}{2} = \underline{15\pi}
\end{aligned}
$$

［右辺］$C:\boldsymbol{r}(t)=(\sqrt{5}\cos t-1,\sqrt{5}\sin t,2\sqrt{5}\cos t-2)\ \ (0\le t\le 2\pi)$

$$
\overrightarrow{X}\ \text{at}\ \boldsymbol{r}(t)=\begin{bmatrix}\sqrt{5}\cos t-1\\ \sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t-1\\ -\sqrt{5}\sin t+4\sqrt{5}\cos t-4\end{bmatrix},\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}\sin t\\ \sqrt{5}\cos t\\ -2\sqrt{5}\sin t\end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{r} &= \{(\sqrt{5}\cos t-1)\cdot(-\sqrt{5}\sin t) \\
&\quad +(\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t-1)(\sqrt{5}\cos t) \\
&\quad +(-\sqrt{5}\sin t+4\sqrt{5}\cos t-4)(-2\sqrt{5}\sin t)\}\,dt \\
&= (5\sin^2 t-40\cos t\sin t+9\sqrt{5}\sin t-\sqrt{5}\cos t+5)\,dt \\
\int_{\partial C}\overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi}(5\sin^2 t+5)dt \ = \underline{15\pi}
\end{aligned}
$$

注意：$\sin t\cos t,\ \sin t,\ \cos t$ は, 0 から 2π まで積分すると 0 なので計算を省略できる.