ベクトル解析からの補足 (by 山田)

基礎的事実 f を $\mathbb{R}^N$ の連続関数とする.

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^N \text{ の任意の閉領域 } V \text{ で} \\ \displaystyle\int_V f\,dv = 0\end{array} \qquad \text{ならば} \quad f \equiv 0.$$

証明 対偶を示す. 点 p において $f(p) = \delta > 0$ とする. f は連続関数なので, じゅうぶん小さな $\varepsilon > 0$ に対して次のことが成り立つ

x が, 中心 p 半径 ε の球 $B_\varepsilon(p)$ 内にあれば $f(x) > \delta/2$.
"p からの距離が ε 以内なら $f(x)$ は 0 より δ に近い (> 0)"

このとき

$$\int_{B_\varepsilon(p)} f\,dv \ \geq \int_{B_\varepsilon(p)} \delta/2\,dv \ = [B_\varepsilon(p) \text{ の体積}] \cdot \frac{\delta}{2} \ > 0$$

$f(p) < 0$ の場合も同様. □

定理 1 $\mathbb{R}^3$ 内で, スカラー場 ρ とベクトル場 $\overrightarrow{A}$ について

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^3 \text{ の任意の閉領域 } V \text{ で} \\ \displaystyle\int_{\partial V} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho\,dv\end{array} \qquad \text{ならば} \quad \mathrm{div}\ \overrightarrow{A} = \rho.$$

特に

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^3 \text{ の任意の閉曲面 } S \text{ で} \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = 0\end{array} \qquad \text{ならば} \quad \mathrm{div}\ \overrightarrow{A} = 0.$$

ほぼ同様の発想で 次のことも成り立つ.

定理 2 $\mathbb{R}^3$ 内で, 2 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ について

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^3 \text{ 内の任意の有界な曲面 } S \text{ で} \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\partial S} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S}\end{array} \qquad \text{ならば} \quad \overrightarrow{B} = \mathrm{rot}\ \overrightarrow{A}.$$

特に

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^3 \text{ の任意の閉曲線 } C \text{ で} \\ \displaystyle\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = 0\end{array} \qquad \text{ならば} \quad \mathrm{rot}\ \overrightarrow{A} = 0.$$

グリーンの（大きい）公式　$\mathbb{R}^3$ 内で, V は区分的に滑らかな曲面に囲まれた有界閉領域とし, $\overrightarrow{n}$ を V の境界 ∂V の「境界としての向き」を定める単位法ベクトル場とする.

(1) $\displaystyle\int_V \psi\nabla^2\varphi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi)\,dv \;=\; \int_{\partial V}\psi\overrightarrow{n}(\varphi)\,dS$

(2) 特に $\displaystyle\int_V \left(\varphi\nabla^2\varphi + |\nabla\varphi|^2\right)\,dv \;=\; \int_{\partial V}\varphi\overrightarrow{n}(\varphi)\,dS$

(3) $\displaystyle\int_V \left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right)\,dv \;=\; \int_{\partial V}\left(\psi\overrightarrow{n}(\varphi) - \varphi\overrightarrow{n}(\psi)\right)\,dS$

証明 (1)　まず $\operatorname{div}\,(\psi\nabla\varphi) \;=\psi\,\operatorname{div}(\nabla\varphi) + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi) \;=\psi\nabla^2\varphi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi)$.

$$
\begin{aligned}
[\text{左辺}] \;&=\; \int_V \operatorname{div}\,(\psi\nabla\varphi)\,dv \quad =\int_{\partial V}\psi\nabla\varphi\,d\boldsymbol{S} \\
&=\; \int_{\partial V}\psi(\nabla\varphi)\cdot\overrightarrow{n}\,dS \quad =\int_{\partial V}\psi\overrightarrow{n}(\varphi)\,dS
\end{aligned}
$$

２つめの等式は発散定理. ３つめで “ベクトル面積素と面積素の関係” $d\boldsymbol{S} = \overrightarrow{n}\,dS$ を利用し, 最後に “スカラー場の勾配と方向微分の関係” $(\nabla\varphi)\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(\varphi)$ を利用.

(2) (1) で $\psi = \varphi$ の場合.　(3) (1) で ψ と φ を交換して差をとる.　□

応用　発想「有界閉領域 V の 調和関数 に関して, 内部のことが境界 ∂V で決まる」

(1)　V で定義された 調和関数 u が, 境界 ∂V 上の任意の点で法方向微分が 0 ならば u は定数関数.

$$\nabla^2 u = 0,\ \overrightarrow{n}(u) = 0 \;\Rightarrow\; u \equiv c \quad (\text{定数関数})$$

(1') V で定義された関数 ρ と 境界 ∂V での関数 f が与えられているとき, V での関数 u に関する次の方程式「ポアッソン方程式」の解は 一意的.

$$\nabla^2 u = \rho, \quad u|_{\partial V} = f$$

(2) X を動点とする.

準備：点 $P\,(p_1, p_2, p_3)$ とし, $r_P = \overline{PX} = \sqrt{(x_1-p_1)^2 + (x_2-p_2)^2 + (x_3-p_3)^2}$ とする.

$\dfrac{1}{r_P}$ は 点 P 以外で 定義された調和関数になる：$\nabla^2\dfrac{1}{r_P} = 0$.

点 P が V の内部にあり, φ が V で調和関数のとき,

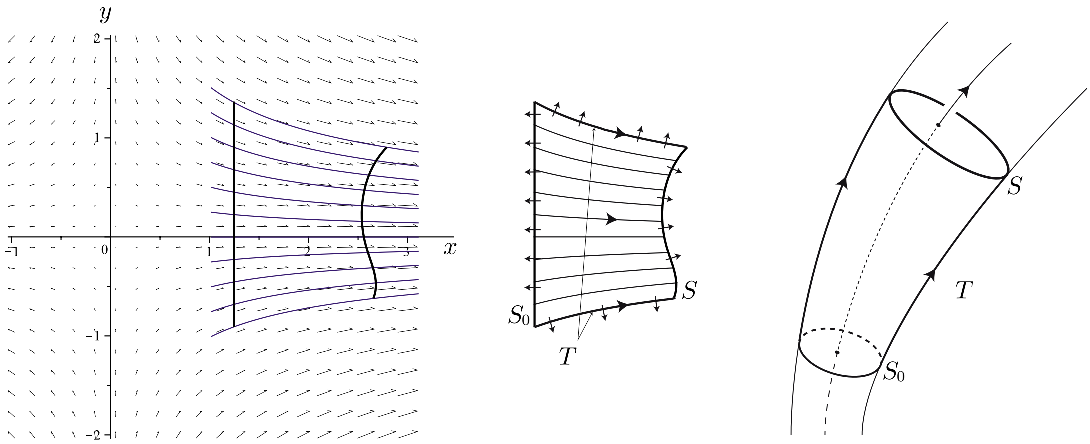
$$4\pi\,\varphi(p) \;=\; \int_{\partial V}\left(\frac{1}{r_p}\overrightarrow{n}(\varphi) - \varphi\overrightarrow{n}\left(\frac{1}{r_p}\right)\right)dS$$

―― V の内部の点 p での値 $\varphi(p)$ が, V の境界の状況から定まる.

ベクトル場の流線のなす 管状の領域 でのベクトル解析 (by 山田)

ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ の積分曲線（または流線）を考える.

定義　曲面 S_0 を流線が接しないようにとり, S_0 の各点を通る積分曲線の束がなす管状の空間図形を ($\overrightarrow{A}$ の) 流管 という. 流管内のどの流線とも 1 点で交わる曲面を 流管の断面 という.



図：ベクトル場の流管（左：１つ次元を下げたイメージ図,　　右：例）

定理　[流管定理] div $\overrightarrow{A} = 0$ ならば, 流管の任意の断面 S に対して

$$\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} \quad \text{は一定の値} \quad \int_{S_0} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} \text{ に等しい.}$$

ただし, S は S_0 と同じ向きで扱う.

証明　流管の内部で S と S_0 に挟まれた閉領域を V とする. V の境界 ∂V は, 2 つの断面 S_0 と S と "筒の部分" T から成る：$\partial V = S_0 \cup S \cup T$. 境界としての向きは次の通りとなる.

- S の向き は流線の向き と同じ.
- S_0 の向き は流線の向き と**逆**（流線は V に入る）.
- T の向き は, V から出て行く法ベクトルで定める.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{A}\,dv = \int_{\partial V} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{（発散定理）} \\ &= -\int_{S_0} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_S \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_T \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

この第 3 項について, 筒部分 T は $\overrightarrow{A}$ の流線の束なので, $\overrightarrow{A}$ は T の各点で T に接する. よって, T の単位法ベクトルを $\overrightarrow{n}_T$ とすると $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n}_T = 0$. そのため

$$\int_T \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_T \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n}_T\,dS = 0.$$

□

ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ に対して $\overrightarrow{B} = \mathrm{rot}\ \overrightarrow{A}$ の流管を <u>($\overrightarrow{A}$ の) 渦管</u> という.

> **定理** ［渦管定理］渦管を一周する任意の閉曲線 C に対して
>
> $$\Gamma = \int_C \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} \quad \text{は一定の値} \int_S \overrightarrow{B} \cdot d\boldsymbol{S} \text{ に等しい.}$$
>
> ここで, S は C に囲まれた $\overrightarrow{B}$ の流管としての 任意の断面.

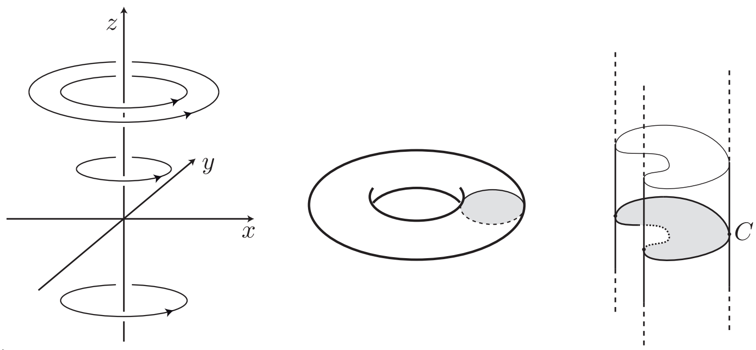
証明 まず $\mathrm{div}\ \overrightarrow{B} = \mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\ \overrightarrow{A}) = 0$.

$$\Gamma = \int_C \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} \ = \ \int_S \mathrm{rot}\ \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} \ = \ \int_S \overrightarrow{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

２つめの等式はストークスの定理. 流管定理により, 値は S に依らない. □

例： $\overrightarrow{R} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rot}\ \overrightarrow{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ （定ベクトル場 “常に上を指す”）

$\overrightarrow{R}$ の流線は z-軸を軸とする同心円で, $\overrightarrow{R}$ の流管は, z-軸を軸とした回転体（例：左図, 中図）
$\overrightarrow{R}$ の渦管（rot $\overrightarrow{R}$ の流管）は, z-軸方向に伸びた 柱（右下図）



xy-平面内の閉曲線 $\quad C : (c_1(t), c_2(t)) \quad (0 \le t \le T) \quad$ ただし $(c_1(T), c_2(T)) = (c_1(0), c_2(0))$
に対して, C の柱とは $\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in C \,\}$ のこと. この場合, 渦管を 1 周する閉曲線 $\overline{C}$ は

$$\overline{C} : \boldsymbol{r}(t) = (c_1(t), c_2(t), z(t)) \quad (0 \le t \le T) \qquad \text{ただし } z(T) = z(0)$$

と表せる. この例では $\quad \overrightarrow{R}_{\mathrm{at}\ \boldsymbol{r}(t)} = \begin{bmatrix} -c_2(t) \\ c_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dc_1}{dt}(t) \\ \frac{dc_2}{dt}(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) \end{bmatrix} dt \quad$ なので,
xy-平面内で C が囲む領域を D とすれば

$$\begin{aligned} \Gamma \ &= \ \int_{\overline{C}} \overrightarrow{R} \cdot d\boldsymbol{r} \quad = \int_0^T \left(-c_2(t) \frac{dc_1}{dt}(t) + c_1(t) \frac{dc_2}{dt}(t) \right) dt \\ &= \ \int_C -y dx + x dy \quad = \int_D 2\, dx dy \quad = 2[D \text{ の面積}] \end{aligned}$$

４つめの等式で グリーンの定理 を利用した.