ベクトル解析 の記号について (by 山田)

数学で広く用いられる記号と, 教科書「ベクトル解析」(矢野健太郎・石原繁 共著, 裳華房) の記号を整理しておく. どちらでも分かるようにして下さい.

$\boxed{0}$ (山田の) プリントでは,

ベクトル場の記号は $\overrightarrow{X}$ や $\boldsymbol{X}$ を用いる.

板書は前者にする予定. (線形代数学ではベクトルは $\overrightarrow{x}$ や $\mathbf{x}, \boldsymbol{x}$ を使った.)

「ベクトル解析」で 特に注意すべきことの 1 つは,

ベクトル (ベクトル場) と スカラー (スカラー) の記号を区別する

ことである. $\alpha\overrightarrow{a}$ と書けば, α はスカラーで $\overrightarrow{a}$ がベクトル.

- $\mathbb{R}^3$ の座標は 基本的に (x, y, z) にするが, (x_1, x_2, x_3) を用いる (その方が便利な) こともある. 「座標は横」で「ベクトルは縦」が通常であるが, このルールは絶対ではない. 特に, 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ ($\overrightarrow{\mathrm{OP}}$) と見なして縦に表示することが 結構ある.
- 「A_x」は「ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ の x 成分」であることが多い. 一方,「φ_x」は「関数 (スカラー場) $\varphi = \varphi(x, y, z)$ の x による偏微分 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$」であることが多い. 文脈で 理解しないと学べない.

$\boxed{1}$ 教科書では $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ と表している.

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

従って $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ とは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ のこと.

$$\boldsymbol{X} = x^2y^3\boldsymbol{i} - xy^3z\boldsymbol{j} + xy^2z(y+z)\boldsymbol{k} \quad \text{とは} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x^2y^3 \\ -xy^3z \\ xy^2z(y+z) \end{bmatrix} \quad \text{のこと.}$$

$\boxed{2}$ 微分作用素の記号 $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とは $\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ のこと. (p.21)

$\boxed{3}$ **ベクトル解析 の主役** (第 3 章 p.21, 28, 32)

勾配 (gradient)	$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\ \varphi$	(スカラー場 から ベクトル場)
発散 (divergence)	$\mathrm{div}\ \boldsymbol{X} = \nabla \cdot \boldsymbol{X}$	(ベクトル場 から スカラー場)
回転 (rotation)	$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{X} = \nabla \times \boldsymbol{X}$	(ベクトル場 から ベクトル場)

それぞれ, 次のように書くと理由が想像でき, 覚えやすい. ($\cdot$ は内積 で $\times$ は外積)

勾配

$$\nabla\varphi \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \varphi \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{bmatrix} \;=\; \mathrm{grad}\;\varphi$$

発散

$$\mathrm{div}\;\boldsymbol{A} \;=\; \mathrm{div}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \;=\; \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \;=\; \nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

回転

$$\mathrm{rot}\;\boldsymbol{A} \;=\; \mathrm{rot}\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \;=\; \nabla\times\boldsymbol{A}$$

注意：grad と div は一般次元（$\mathbb{R}^n$）でも扱う．rot は３次元に特有の演算.

線積分　ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の 曲線 $C : \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ に沿う線積分（p.41）

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int_a^b \left(A_x\frac{dx}{dt} + A_y\frac{dy}{dt} + A_z\frac{dz}{dt} \right) dt$$

―― 教科書では, 単位接ベクトル場 $\boldsymbol{t}$ と C の線素 ds を用いている.

面積分　ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の 曲面 $S : \boldsymbol{r}(u,v)$ （u, v の領域 D） に沿う面積分（p.46）

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \;=\; \iint_D \boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right) du\,dv$$

$\boldsymbol{n}$ は 曲面の単位法ベクトル場, dS は面積素, $d\boldsymbol{S}$ はベクトル面積素（$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,dS$）である．中辺の $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ は「$\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向成分」（スカラー）で, これを教科書では A_n と表している．これを $(\boldsymbol{A})_{\boldsymbol{n}}$ と表す場合もある.

線積分の $d\boldsymbol{r}$, 面積分の $d\boldsymbol{S}$ は, 黒板ではそれぞれ $d\overrightarrow{r}, d\overrightarrow{S}$ を用いる.

空間での積分　教科書では　$dv \;=\; dx\,dy\,dz$　としている．dV や $d\,vol$ と書くこともある.

今までのことから, 例えば「発散定理」は, 教科書では（p.54）

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dv = \int_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

であるが, 次のように表すこともある.

$$\int_V \mathrm{div}\overrightarrow{A}\,dV = \int_{\partial V} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS}$$

曲線, 曲面 の扱い方 （by 山田）

曲線に沿う線積分, 曲面に沿う面積分 などの計算には, まず曲線, 曲面の扱い方を確認しておく必要がある.

基本的な前提： この講義では, 曲線や曲面は 無限回微分可能なパラメータ表示をもつものの和集合として表せるもの（「区分的に滑らか」という）しか扱わない.

曲線 空間の曲線は, 通常

$$C : \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \le t \le b$$

のように表す. 速度ベクトル と その長さ（速さ） はそれぞれ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix}, \qquad \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

速度ベクトルの長さ（速さ）が常に 1 のとき, パラメータの文字は t の代わりに s を用いて「弧長パラメータ」という：$\left\|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}(s)\right\| \equiv 1$. 弧長パラメータの場合, 曲線上の 2 点 $\boldsymbol{r}(s_1)$ と $\boldsymbol{r}(s_2)$ の間の曲線の長さは $|s_2 - s_1|$ となる.

速さ を区間 $[a, b]$ で積分すると, 曲線 C の長さが得られる.

$$\int_a^b ds \;=\; \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right\| dt \;=\; [C\text{ の長さ}]$$

ここで, $s = s(t) \left(\begin{array}{c|c} s & a \to b \\ \hline t & \alpha \to \beta \end{array} \right)$ の座標変換を用いた.

そこで, C のベクトル線素 ds と**ベクトル線素** $d\boldsymbol{r}$ を次で定める.（$d\boldsymbol{r}$ を $\overrightarrow{dr}$ と書くこともある）

$$ds \;=\; \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right\| dt, \quad d\boldsymbol{r} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{ds}\,ds \\ \dfrac{dy}{ds}\,ds \\ \dfrac{dz}{ds}\,ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt}\,dt \\ \dfrac{dy}{dt}\,dt \\ \dfrac{dz}{dt}\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix} dt$$

例えば, ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ に対して

$$\overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix} dt \;=\; \left(A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt} + A_z \frac{dz}{dt} \right) dt$$

のように用いる.（p.41–42）

曲面 空間の曲面を表すには，２つのパラメータ変数が必要．通常は

$$S : \boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \qquad (D\text{: } u,v \text{ の領域})$$

のように表す．曲面上の点 $\boldsymbol{r}(u,v)$ において，ベクトル

$$\boldsymbol{N}(u,v) \;=\; \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}$$

は（$\mathbf{0}$ でないことを仮定する）曲面に垂直「法ベクトル」となる．その長さ

$$\|\boldsymbol{N}\| \;=\; \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| \;=\; \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right\|$$

を領域 D で積分すると，曲面 S の面積が得られる．

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv \;=\; [S \text{ の面積}]$$

そこで S の**面積素** dS, S の**ベクトル面積素** $d\boldsymbol{S}$（あるいは $\overrightarrow{dS}$）を 次で定める．(p.44–45)

$$dS \;=\; \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\,dv, \qquad d\boldsymbol{S} \;=\; \boldsymbol{n}\,dS \;=\; \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) du\,dv$$

ここで, $\boldsymbol{n}$ は 単位法ベクトル（接平面に垂直で長さが１）である：

$$\boldsymbol{n}(u,v) \;=\; \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \right\|}.$$

曲面が「向き」をもつ場合は, $\boldsymbol{n}$ が 向きと一致するように (u,v)-座標をとる．

グラフ型の曲面 $z = \varphi(x,y)$ の場合, $\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$ が座標となり，

$$\boldsymbol{n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + {\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2}} \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$dS \;=\; \sqrt{1 + {\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2}\,dx\,dy, \qquad d\boldsymbol{S} \;=\; \begin{bmatrix} -\varphi_x\,dx\,dy \\ -\varphi_y\,dx\,dy \\ 1 \quad dx\,dy \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy$$

となる．

曲線や曲面の向きについて（by 山田）

「方向」と「向き」：ゼロベクトル $\mathbf{0}$ でない（始点の同じ）２つの ベクトル$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について,

実数 k $(k \neq 0)$ を用いて $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ と表せるとき「$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は同じ方向である」という.

そのうちで, $k > 0$ のとき $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は「同じ向き」, $k < 0$ のとき「逆向き」という.

曲線の向き：

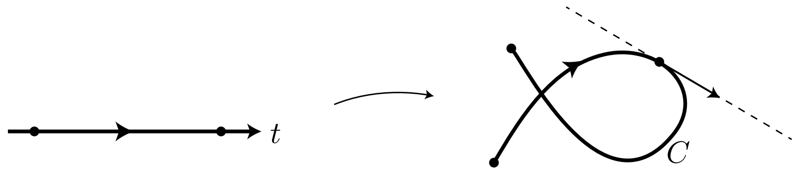
連結な（つながった）曲線 C の各点 p での接ベクトル $\overrightarrow{v}_{\mathrm{p}}$ を

条件：p を連続的に動かすと $\overrightarrow{v}_{\mathrm{p}}$ も連続的に変化する

を満たすように C 全体で指定すること

を「曲線の向き」という. すべての点 p で $\overrightarrow{v}_{\mathrm{p}}$ と同じベクトルの向きを指定されれば 曲線の向き も同じとみなす. 向きを指定された曲線を「有向曲線」という. C と図が同じで逆向きの曲線を $-C$ で表す.

数直線は 自然な「正の向きに増加する」向きを持つので, 有向曲線に座標を与えるときは, 数直線の向きと曲線の向きが一致するようにとる.



曲面の向き（空間内の曲面の場合）：

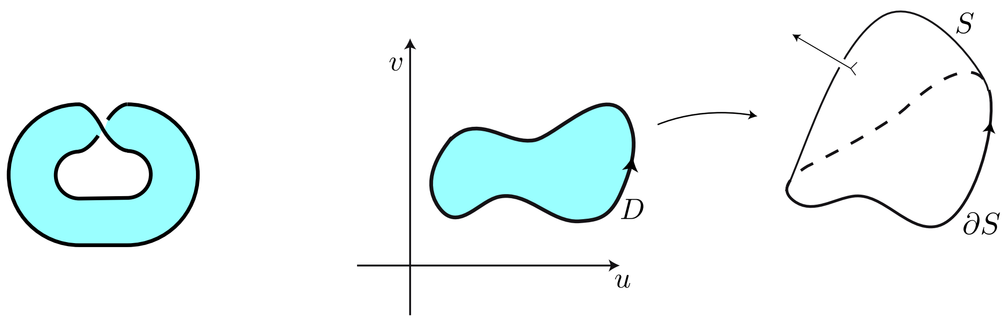
連結な曲面 S の各点 p で 法 ベクトル $\overrightarrow{n}_{\mathrm{p}}$ を

条件：p を連続的に動かすと $\overrightarrow{n}_{\mathrm{p}}$ も連続的に変化する

を満たすように S 全体で指定できるとき, 曲面が「向き付け可能」という.

すべての点 p で $\overrightarrow{n}_{\mathrm{p}}$ と同じ向きのベクトルを指定されれば 同じ向き とみなす. その指定を 曲面の「向き」（あるいは「表：オモテ」）といい, 向きを指定された曲面を「有向曲面」という. 有向曲面 S の向きを逆にした曲面を $-S$ で表す.

向き付け不可能な曲面として「メビウスの帯」などがある. 有向曲面に座標 $\boldsymbol{r}(u, v)$ を与えるときは, 曲面の向きが 座標の定める法ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ と一致するようにとる.



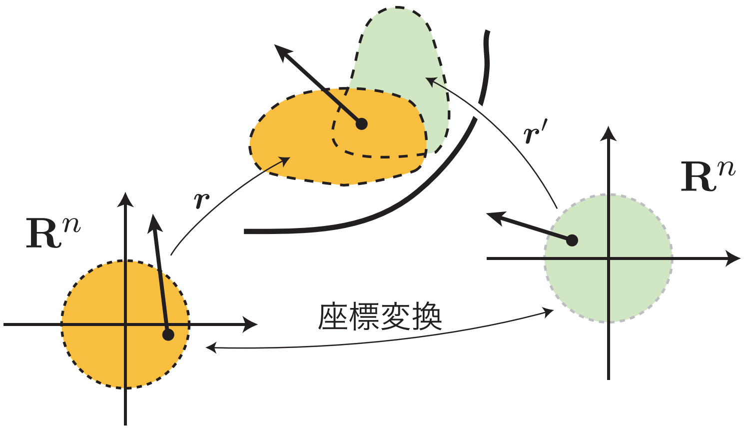
境界の向き： 特に断らない場合は, 次の慣習「境界としての向き」に従う.

- 閉曲面 S が空間図形 V を囲む $(\partial V = S)$ とき
  S の向きは, V から外へ向かう法ベクトル "V から外" で定める.
- 有向曲面 S が境界 C に囲まれる $(C = \partial S)$ とき,
  境界 C の向きは, S のオモテで "外が右" で定める.
- $z = f(x, y)$ の形の曲面は, 通常 z-成分が正の法ベクトルで向きを定める.

球面（球の境界）の下半分 のような場合に, 特に注意.

発展： 一般次元の図形の「向き」

3 次元以上の "図形"（正確には「多様体」という）や, $\mathbb{R}^3$ より高次元の $\mathbb{R}^N$ 内の曲面では, 法ベクトルで向きを定めることができないので, 次のように扱う.



・n 次元の図形 M の, 重なりをもつ 2 つの 座標 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$

$$\boldsymbol{r}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \boldsymbol{r}'(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

が, 重なった部分で 同じ向き か 逆向き かを,

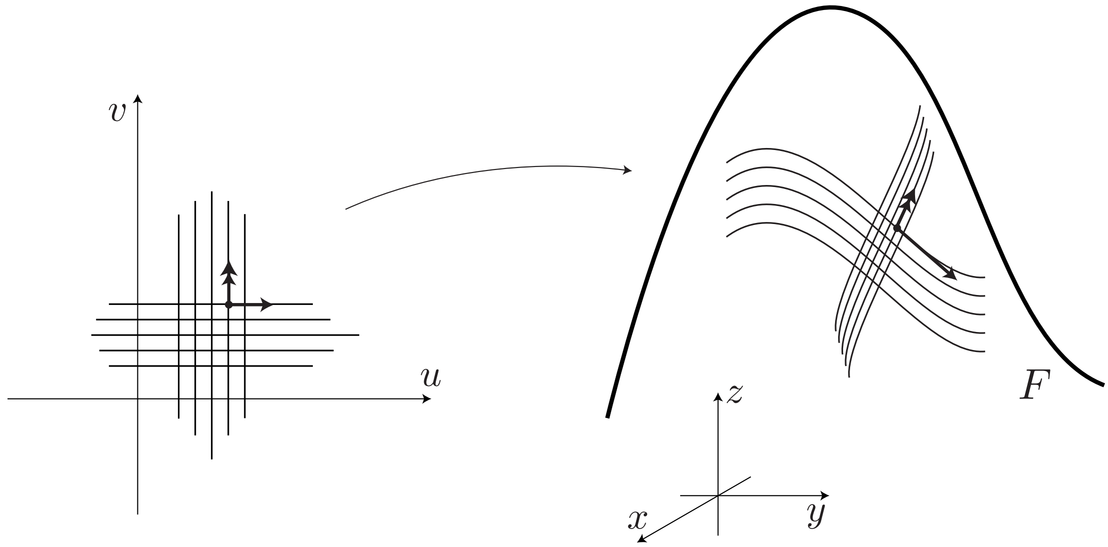
$$\text{座標変換} \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ y_n = y_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \text{のヤコビ行列式} \quad \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & & & \vdots \\ \vdots & & \frac{\partial y_j}{\partial x_i} & \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \neq 0$$

の符号が 正 か 負 かで定める. （この行列式が 0 になる点は, その点で座標が退化すること（同一の点が複数の表示をもつなど）を意味しており 座標から除外する.）

・M が 重なりをもつ全ての組で同じ向きになる座標だけ で覆うことができるとき, M を「向き付け可能」といい, その座標の指定を M の「向き」という. そうでないとき M を「向き付け不可能」という.

曲面の座標

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \Big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\Big)$$



「応用幾何学」プリントの訂正・補足　（7月6日版）

訂正１　プリント「曲線, 曲面の扱い方」の右半分

正：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \ = \ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}$$

誤：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u,v) \ = \ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

訂正２　プリント「曲線, 曲面の扱い方」の左半分

正：

$$\int_a^b ds \ = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right\| dt \ = \ [C\text{ の長さ}]$$

ここで, $s = s(t) \left(\begin{array}{c|c} s & a \to b \\ \hline t & \alpha \to \beta \end{array} \right)$ の座標変換を用いた.

誤：

$$\int_a^b ds \ = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right\| dt \ = \ [C\text{ の長さ}]$$

補足１　スカラー場（関数）$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の外微分は

$$d\varphi \ = \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}dx_n$$

であった. これは「0 次微分形式の外微分」である. r 次微分形式の外微分 は, これの拡張である.

補足２　スター作用素は, 微分形式に対しても拡張される.

［$n = 3$ の場合］

$$\begin{aligned} *(Xdx + Ydy + Zdz) \ &= \ Xdy \wedge dz + Ydz \wedge dx + Xdx \wedge dy \\ *(Xdy \wedge dz + Ydz \wedge dx + Xdx \wedge dy) \ &= \ Xdx + Ydy + Zdz. \end{aligned}$$