

幾何の用語「有界・開集合／閉集合・領域」 (by 山田)

準備：数学で「無限」が関わる現象を扱うことは難しい．幾何学で、特に積分量を考えるときは“幾何的な広がり”が無限であると問題が生じる．無限 $(+\infty)$ は数ではないことに注意．

閉集合・開集合 は 1 次元の場合の 閉区間・开区間 の拡張概念である．

閉区間 例 $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 境界 $0, 1$ を含む 

开区間 例 $(0, 1) = \{x \mid 0 < x < 1\}$ 境界 $0, 1$ を含まない 

問題点の指摘

例 1： xy -平面で、第 1 象限の面積（定数 1 の積分） $\int_{\text{第 1 象限}} dx dy = +\infty$

例 2：开区間 $(0, 1)$ での $f(x) = \frac{1}{x}$ の積分 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$

例 2 の説明：被積分関数で $f(0)$ は定義されないが、 $x = 0$ “左端”は定義域ではないので、このことは問題にはならない．しかし、この関数を積分（広義積分）しようとする $x \rightarrow 0$ で $f(x)$ が 限度を超えて発散する $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$ ため、上の積分値は $+\infty$ に発散する．
積分値は定まらない．

記号 $B_R(\mathbf{p})$ を半径 R 、中心 $\mathbf{p}$ の開球体とする． $B_R(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < R\}$ ．

定義 1 $\mathbb{R}^N$ で、部分集合 S が 有界 であるとは、次が成り立つこと

$$\text{じゅうぶん大きな値 } R \text{ に対して } S \subset B_R(\mathbf{o})$$

定義 2 $\mathbb{R}^N$ 内で、集合 U が 開集合 であるとは、次が成り立つこと

任意の U の点 $\mathbf{x}$ に対して、じゅうぶん小さな値 $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$ ．

集合 V が 閉集合 であるとは、 V の補集合が開集合であること．

開集合でも閉集合でもない集合も多い． 例： $\{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 \leq y \leq 1\}$ ．

事実 $\mathbb{R}^N$ 内の集合 V が閉集合であることは、次の条件に一致する．

V 内の点列 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^\infty$ が $\mathbb{R}^N$ 内で $\mathbf{x}$ に収束するとき $\mathbf{x} \in V$

例： $\mathbb{R}$ 内で、 $(0, 1)$ は閉集合ではない．

点列 $x_n = 1/n$ を考えると $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin (0, 1)$ ．

定義 3 $\mathbb{R}^N$ 内で、連結な開集合 を 領域 という．

この講義では簡単のため、領域は常に閉包（極限点、特に境界を追加すること）して扱い、閉領域 という用語を用いることにする．

このような論理は、厳密には「位相」の理論とよばれ、数学全体の基礎分野である．