

2 連操作 $\text{rot} \cdot \nabla$ と $\text{div} \cdot \text{rot}$ (by 山田)

定理： $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されるスカラー場, ベクトル場について

$$(1) \text{rot}(\nabla\varphi) = 0.$$

$$(1') \text{rot } \vec{X} = \vec{0} \text{ ならば } \exists \varphi \text{ が存在して } \vec{X} = \nabla\varphi.$$

ただし この φ (の逆算) には定数の自由度がある.

$$\text{微分形式を用いると } (1) d d\varphi = 0. \quad (1') d\tilde{X} = 0 \text{ ならば } \tilde{X} = d\varphi.$$

$$\cdot \vec{X} \quad (\text{rot } \vec{X} = \vec{0}) \text{ から } \varphi \text{ の構成法: } \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (\text{各 } X_i \text{ は関数}) \text{ に対して}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_a^x X_1(s, b, c) ds + \int_b^y X_2(x, t, c) dt + \int_c^z X_3(x, y, u) du \\ &= \int_L \vec{X} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

ただし (a, b, c) は任意の点. 通常は $O(0, 0, 0)$ をとる.

L は $O(0, 0, 0)$, $A(x, 0, 0)$, $B(x, y, 0)$, $P(x, y, z)$ をたどる折れ線 $OA + AB + BP$.

証明： $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = X_3$ は容易. $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$ から $\frac{\partial X_3}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial z}$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= X_2(x, y, c) + \frac{\partial}{\partial y} \int_c^z X_3(x, y, u) du \\ &= X_2(x, y, c) + \int_c^z \frac{\partial X_3}{\partial y}(x, y, u) du \\ &= X_2(x, y, c) + \int_c^z \frac{\partial X_2}{\partial z}(x, y, u) du \\ &= X_2(x, y, c) + X_2(x, y, z) - X_2(x, y, c) = X_2(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = X_1 \text{ も同様.}$$

□

例. $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 3z \\ 3y + 4z \end{pmatrix}$ ($\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$ を確認せよ) の場合

$$\varphi = \int_0^x 2s ds + \int_0^y 2x dt + \int_0^z 3y + 4u du = x^2 + 2xy + 3yz + 2z^2 (+C)$$

定理： $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されるスカラー場, ベクトル場について

$$(2) \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{X}) = 0.$$

$$(2') \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ ならば } \exists \vec{X} \text{ が存在して } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{X}.$$

ただし この $\vec{X}$ (の逆算) には $\nabla\varphi$ 型の自由度がある.

$$\operatorname{rot}(\vec{X} + \nabla\varphi) = \operatorname{rot} \vec{X} + \operatorname{rot}(\nabla\varphi) = \operatorname{rot} \vec{X} + \vec{0} = \operatorname{rot} \vec{X}$$

微分形式を用いると

$$(2) dd\tilde{X} = 0. \quad (2') d\mu_B = 0 \text{ ならば } \mu_B = d\tilde{X} \quad (\text{ただし } \mu_B = *\tilde{B} \text{ 2次形式})$$

$$\cdot \vec{B} \quad (\operatorname{div} \vec{B} = 0) \text{ から } \vec{X} \text{ の構成法: } \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \text{ と表すとして}$$

$$X_1(x, y, z) = 0 \quad X_2(x, y, z) = \int_a^x B_3(s, y, z) ds$$

$$X_3(x, y, z) = - \int_a^x B_2(s, y, z) ds + \int_b^y B_1(a, t, z) dt$$

ただし $(a, b, 0)$ は任意の点. 通常は $O(0, 0, 0)$ をとる.

$$\text{証明: } \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ から } \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0 \text{ が成り立つので}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z} &= - \int_a^x \frac{\partial B_2}{\partial y}(s, y, z) ds + B_1(a, y, z) - \int_a^x \frac{\partial B_3}{\partial z}(s, y, z) ds \\ &= \int_a^x \frac{\partial B_1}{\partial x}(s, y, z) ds + B_1(a, y, z) \\ &= B_1(x, y, z) - B_1(a, y, z) + B_1(a, y, z) = B_1(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x} = B_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} = B_3 \text{ の確認はもっと簡単.} \quad \square$$

$$\text{例. } \vec{B} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ y - 2z \\ 4x - 2z \end{pmatrix} \quad (\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ を確認せよ) の場合}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \quad X_2 = \int_0^x 4s - 2z ds = 2x^2 - 2xz \\ X_3 &= - \int_0^x (y - 2z) ds + \int_0^y 3t dt = -xy + 2xz + \frac{3}{2}y^2, \end{aligned} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x^2 - 2xz \\ -xy + 2xz + \frac{3}{2}y^2 \end{pmatrix}$$

(例の続き) 与えられた $\vec{B}$ ($\text{div } \vec{B} = 0$) に対して, $\vec{B} = \text{rot } \vec{X}$ となる $\vec{X}$ の逆算には $\nabla\varphi$ 型の自由度がある.

この例で, 例えば $f = -2x^2y - \frac{3}{2}y^2z$ とおくと $\nabla f = \begin{pmatrix} -4xy \\ -2x^2 - 3yz \\ -\frac{3}{2}y^2 \end{pmatrix}$ となり,

$\vec{X}' = \vec{X} + \nabla f = \begin{pmatrix} -4xy \\ -2xz - 3yz \\ -xy + 2xz \end{pmatrix}$ を得る. $\text{rot } \vec{X} = \text{rot } \vec{X}' = \vec{B}$ となっている.