線積分, 面積分の計算例　(by 山田)

「微分積分学」の積分計算は各自で復習して下さい.

S1. スカラー場の線積分
曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = (t, t, t^2)$ $(0 \leq t \leq 1)$ に沿う $\varphi = \varphi(x, y, z) = x + 2yz$ の線積分

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (2t)^2} = \sqrt{2(1 + 2t^2)}.$$

よって　線素 $ds = \sqrt{2(1 + 2t^2)}\, dt.$

（C の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2(1+2t^2)}\, dt = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$（$t = \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh u$ とおく））

$$\varphi(\boldsymbol{r}(t)) = t + 2 \cdot t \cdot t^2 = t(1 + 2t^2).$$

$$\int_C \varphi\, ds = \int_0^1 t(1 + 2t^2)\sqrt{2(1 + 2t^2)}\, dt = \cdots = \underline{\frac{\sqrt{2}}{10}(9\sqrt{3} - 1)}$$

S2. スカラー場の面積分
$\triangle\mathrm{ABC} = \{2x + y + z = 2; x, y, z \geq 0\}$ 上で $\varphi = \varphi(x, y, z) = x^2 + y - z$
の面積分

$\triangle\mathrm{ABC}$ を　$z = -2x - y + 2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 - 2x$　とみなす.
座標として　$\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, -2u - v + 2),\ \ D : 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2 - 2u.$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{6}.$$

よって　面積素 $dS = \sqrt{6}\, dudv.$　（$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\displaystyle\int_D \sqrt{6}\, dudv = \sqrt{6}$）

$$\varphi(\boldsymbol{r}(u, v)) = u^2 + v - (-2u - v + 2) = u^2 + 2u + 2v - 2.$$

$$\int_{\triangle\mathrm{ABC}} \varphi\, dS = \iint_D (u^2 + 2u + 2v - 2)\sqrt{6}\, dudv = \cdots = \underline{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

V1. ベクトル場の線積分

曲線（らせん）$C : \boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad (0 \le t \le \pi/2)$ に沿う $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2y \\ x \\ \sin^2 z \end{pmatrix}$

の線積分 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r}$

および, その他の線積分 $\displaystyle\int_C \overrightarrow{A}\, ds, \quad \int_C \overrightarrow{A} \times d\boldsymbol{r}.$

$$\overrightarrow{A} \text{ at } \boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} 2\sin t \\ \cos t \\ \sin^2 t \end{bmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad ds = \sqrt{2}\, dt.$$

$$\overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} = (2\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \sin^2 \cdot 1) dt \ = (1 - 2\sin^2 t) dt$$

$$\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t)\, dt = \cdots = \underline{0}$$

—— これが 通常の「ベクトル場の線積分」

$$\int_C \overrightarrow{A}\, ds = \int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} 2\sin t \\ \cos t \\ \sin^2 t \end{bmatrix} \sqrt{2}\, dt \ = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\, dt \\ \sqrt{2} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt \\ \sqrt{2} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt \end{bmatrix} = \cdots = \underline{\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\pi/4 \end{bmatrix}}$$

$$\overrightarrow{A} \times d\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \cos t (1 - \sin^2 t) \\ -\sin t (2 + \sin^2 t) \\ 3\cos t \sin t \end{bmatrix} dt$$

$$\int_C \overrightarrow{A} \times d\boldsymbol{r} = \int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} \cos t (1 - \sin^2 t) \\ -\sin t (2 + \sin^2 t) \\ 3\cos t \sin t \end{bmatrix} dt = \cdots = \underline{\begin{bmatrix} 1/3 \\ -7/3 \\ 3/2 \end{bmatrix}}$$

V2. ベクトル場の面積分

$\triangle\mathrm{ABC} = \{x+2y+2z=2; x,y,z \geq 0\}$ での $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} xy \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$ の面積分

$\displaystyle\int_{\triangle\mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S}.$ その他の面積分 $\displaystyle\int_{\triangle\mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} dS,\quad \int_{\triangle\mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} \times d\boldsymbol{S}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ を $x = -2y-2z+2;\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1-y$ とみなす.
座標としては $\boldsymbol{r}(u,v) = (2-2u-2v, u, v),\ D: 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1-u.$
D は単位3角形 $\triangle_o$ である.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| = 3.$$

向きの確認：法ベクトルの z-成分が正なので, この向きでよい.
面積素 $dS = 3\,dudv$. （$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\displaystyle\int_D 3\,dudv = 3/2$）

$$\overrightarrow{A} \text{ at } \boldsymbol{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 2(1-u-v)u \\ -1 \\ v \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} dudv,$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} &= \{2(1-u-v)u - 2 + 2v\} dudv \\ &= 2(-u^2 - uv + u + v - 1) dudv \end{aligned}$$

$$\int_{\triangle\mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D 2(-u^2 - uv + u + v - 1) dudv = \cdots = \underline{-\frac{7}{12}}$$

—— これが 通常の「ベクトル場の面積分」

$$\int_{\triangle\mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} dS = \iint_D \begin{bmatrix} 2(1-u-v)u \\ -1 \\ v \end{bmatrix} 3\,dudv = \begin{bmatrix} 6\iint_D (1-u-v)u\,dudv \\ -3\iint_D dudv \\ 3\iint_D v\,dudv \end{bmatrix} = \cdots = \underline{\begin{bmatrix} 1/4 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$$

$$\overrightarrow{A} \times d\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -2v-2 \\ -4(1-u-v)u + v \\ 4(1-u-v)u + 1 \end{bmatrix} dudv = \begin{bmatrix} -2(v+1) \\ 4(u^2+uv-u) + v \\ -4(u^2+uv-u) + 1 \end{bmatrix} dudv$$

$\displaystyle\iint_D u^2 + uv - u\,dudv = \cdots = -1/24$ を準備しておき,

$$\int_{\triangle \mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} \times d\boldsymbol{S} = \iint_D \begin{bmatrix} -2(v+1) \\ 4(u^2+uv-u)+v \\ -4(u^2+uv-u)+1 \end{bmatrix} dudv$$

$$= \begin{bmatrix} -2\iint_D v+1\,dudv \\ \iint_D 4(u^2+uv-u)+v\,dudv \\ \iint_D -4(u^2+uv-u)+1\,dudv \end{bmatrix} = \cdots = \underline{\begin{bmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}}$$

V3. ベクトル場の面積分

上半球面 $S = \{x^2+y^2+z^2 = 4\,;z \geq 0\}$ での $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ -z \end{pmatrix}$ の面積分 $\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S}$

S を $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$: $x^2+y^2 \leq 4$ とみなす.
座標として $\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{4-x^2-y^2})$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -x/z \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -y/z \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}} = \frac{2}{z} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

向きの確認：法ベクトルの z-成分が正なので, この向きでよい.
面積素 $dS = \dfrac{2\,dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.
（S の面積は $\iint_D \dfrac{2\,dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \dfrac{2r\,dr}{\sqrt{4-r^2}} = 8\pi$（極座標に変換））

$$\overrightarrow{A} \text{ at } \boldsymbol{r}(x,y) = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \\ -\sqrt{4-x^2-y^2} \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} x/\sqrt{4-x^2-y^2} \\ y/\sqrt{4-x^2-y^2} \\ 1 \end{bmatrix} dxdy,$$

$$\overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{4x^2+4y^2-(4-x^2-y^2)}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy = \frac{5x^2+5y^2-4}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy,$$

$$\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \frac{5x^2+5y^2-4}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{(5r^2-4)r\,dr}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{16}{3} = \underline{\frac{32\pi}{3}}$$

その他の面積分も計算すると $\int_S \overrightarrow{A} dS = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8\pi \end{bmatrix}, \quad \int_S \overrightarrow{A} \times d\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.