ガウスの発散定理　証明の概要 (by 山田)

$\mathbb{R}^3$ の座標変数は通常 xyz であるが, $x_1x_2x_3$ の方が “わかりやすい” あるいは “伝えやすい” ことがある．ここでは、場合によって読み替えて使うこととする．

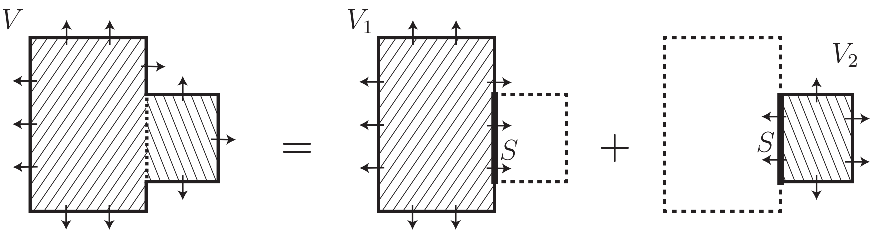
定理 [ガウスの発散定理]
$\mathbb{R}^3$ 内で, V は区分的に滑らかな曲面（∂V）に囲まれた有界閉領域 とする．
V の境界 ∂V は「境界としての向き」で扱うとする．このとき,

$$\int_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{X}\,dv = \int_{\partial V} \overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S}$$

次の２つも「ガウスの（発散）定理」と呼ばれることがある．

$$\int_V \mathrm{grad}\ f\,dv = \int_{\partial V} f\,d\boldsymbol{S}, \qquad \int_V \mathrm{rot}\ \overrightarrow{X}\,dv = -\int_{\partial V} \overrightarrow{X}\times d\boldsymbol{S}$$

補題 ［領域に関する和公式］２つの有界閉領域 V_1 と V_2 が, 境界の一部として, 有界な曲面 S を反対側（表・裏）から共有するとき, V_1 と V_2 を S に沿って接着した領域を $V = V_1 \cup V_2$ とする．



イメージ図（本来は 空間内の領域）

・空間領域での関数の積分の和公式.

$$\int_V \psi\,dv = \int_{V_1} \psi\,dv + \int_{V_2} \psi\,dv$$

は明らかである．ψ は関数（$\psi = \mathrm{div}\ \overrightarrow{X}$ を想定）．一方,
・境界に沿う積分の和公式.　S が境界の一部でなくなること

$$\partial V = (\partial V_1 - S) \cup (\partial V_2 - S)$$

と “V_1 の境界としての S の向きと V_2 の境界としての S の向きが **逆** ”
とが対応して, 次が成り立つ．

$$\int_{\partial V} \overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial V_1} \overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\partial V_2} \overrightarrow{X}\cdot d\boldsymbol{S}$$

従って, 発散定理の証明は, 領域 V を分割して行えば良い.

補助定理　∂V の, V の境界としての向きを指す単位法ベクトル場を $\overrightarrow{n}$ とする.
関数 $f = f(x_1, x_2, x_3)$ について

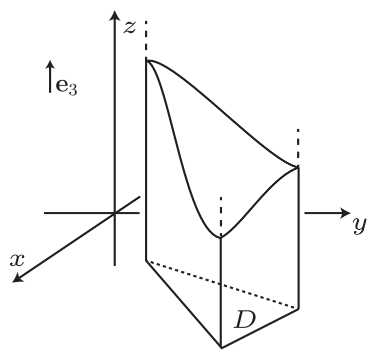
$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dv = \int_{\partial V} f\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial V} f\, \mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$i = 3$ の代わりに $i = 1, 2$ の場合も同様.

注１：$\overrightarrow{n}\, dS = d\boldsymbol{S}$ はベクトル面積素.

注２：$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,　$\mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n} = n_3$ （$\overrightarrow{n}$ の第３成分）.

補助定理の証明：簡単な場合として, V が
柱状の場合について示す.



［柱状の閉領域］
　xy 平面内の閉領域 D の柱 のうち,
　D 上で $\varphi > 0$ をみたす関数 $\varphi = \varphi(x, y)$ を用いて
　下底面：xy 平面（領域 D）と
　上底面：曲面 $z = \varphi(x, y)$ に挟まれた領域

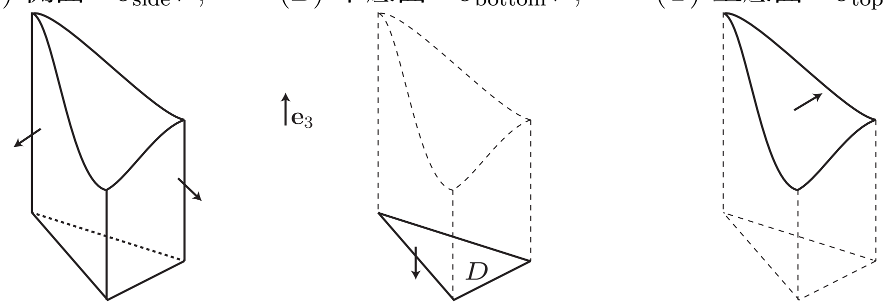
$$V = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq \varphi(x, y) \,\}$$

まず左辺について

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_V \frac{\partial f}{\partial z}\, dxdydz \\
&= \iint_D \left(\int_0^{\varphi(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) dxdy \\
&= \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) - f(x, y, 0)\ dxdy \\
&= \iint_D f(x, y, \varphi(x, y))\ dxdy - \iint_D f(x, y, 0)\ dxdy
\end{aligned}$$

次に右辺. ∂V は次の 3 つの部分から成る： $\quad \partial V = \partial_{\mathrm{side}} V \cup \partial_{\mathrm{bottom}} V \cup \partial_{\mathrm{top}} V.$

(S) 側面：$\partial_{\mathrm{side}} V$, (B) 下底面：$\partial_{\mathrm{bottom}} V$, (T) 上底面：$\partial_{\mathrm{top}} V$.



(S) 側面 では 法ベクトル（$\overrightarrow{n}$ と平行）が $\mathbf{e}_3$ と垂直. $\quad \mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n} = 0.$

(B) 下底面 は xy 平面 $(z=0)$ 内の D

境界としての向き の単位法ベクトルは $\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, また $dS = dxdy$.

よって

$$\mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n}\, dS \;=\; -dxdy$$

(T) 上底面 は $z = \varphi(x, y)$ （$(x, y) \in D$）

境界としての向き の法ベクトルとして $\begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}$.

これと同じ向きの単位法ベクトルは $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{{\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}$

また 面積素は $dS = \sqrt{{\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 + 1}\, dxdy$.

$$\mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n}\, dS \;=\; \frac{1}{\sqrt{{\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 + 1}} \sqrt{{\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 + 1}\, dxdy \;=\; dxdy$$

―― $\overrightarrow{n}\, dS$ は意外と簡単！

以上から

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_{\partial V} f\, dxdy \\ &= \int_{\text{側面}} f\, dxdy + \int_{\text{下底面}} f\, dxdy + \int_{\text{上底面}} f\, dxdy \\ &= 0 \;-\iint_D f(x, y, 0)\, dxdy + \iint_D f(x, y, \varphi(x, y))\, dxdy \end{aligned}$$

左辺と右辺が等しいことが示された. $\square$

発散定理の証明：　ベクトル場 $\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ の各成分 X_i について, 補助定理で

$$f = X_1 \text{ で } i = 1 \quad \text{とすると} \quad \int_V \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\, dv = \int_{\partial V} X_1\, \mathbf{e}_1 \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$f = X_2 \text{ で } i = 2 \quad \text{とすると} \quad \int_V \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\, dv = \int_{\partial V} X_2\, \mathbf{e}_2 \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$$f = X_3 \text{ で } i = 3 \quad \text{とすると} \quad \int_V \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\, dv = \int_{\partial V} X_3\, \mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

$\overrightarrow{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ である.
この３式の和をとれば 発散定理が得られる.　$\square$

ストークスの定理　証明の概要 (by 山田)

> **定理** [ストークスの定理]
> $\mathbb{R}^3$ 内で, S は 区分的に滑らかな閉曲線（∂S）に囲まれた, 向き付けられた曲面 とする. S の境界 ∂S は「境界としての向き」で扱うとする. このとき,
>
> $$\int_S \mathrm{rot}\ \overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S} \overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{r}$$

次の公式も「ストークスの定理」と呼ばれることがある.

$$\int_S \mathrm{grad}\ \varphi \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S} \varphi\, d\boldsymbol{r}$$

補助定理　曲面 S の法単位ベクトルを $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ とする. 関数 $f = f(x_1, x_2, x_3)$ について

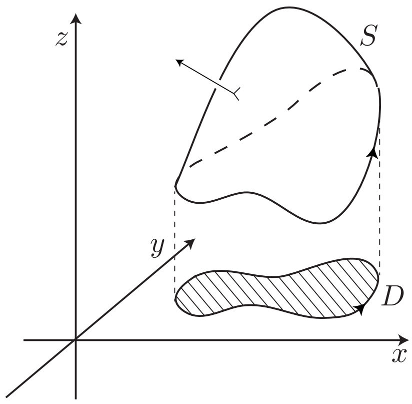
$$\int_S \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 \cdot \overrightarrow{n} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n} \right) dS = \int_{\partial S} f\, dx_1$$

$(i, j, k) = (1, 2, 3)$ を巡回したものも成立.

補助定理の証明：簡単な場合として, S がグラフ型の曲面

$$S = \{\, z = \varphi(x, y) \,|\, (x, y) \in D\} \qquad (D \text{ は閉領域})$$

の場合について示す.



S の座標：$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$; $(x, y) \in D$.

S の法ベクトルとして $\begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}$.

これと同じ向きの単位法ベクトルは $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\sqrt{{\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}$.

以下, 何度も登場するので $\sqrt{{\varphi_x}^2+{\varphi_y}^2+1}$ を $\sqrt{\quad}$ と略記する. $\overrightarrow{n}$ の成分は

$$n_1=\frac{-\varphi_x}{\sqrt{\quad}},\quad n_2=\frac{-\varphi_y}{\sqrt{\quad}},\quad n_3=\frac{1}{\sqrt{\quad}}$$

面積素は $dS=\sqrt{\quad}\,dxdy$. また $n_2=\mathbf{e}_2\cdot\overrightarrow{n},\ n_3=\mathbf{e}_3\cdot\overrightarrow{n}$ なので

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{-\varphi_y}{\sqrt{\quad}}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{\sqrt{\quad}}\right)\sqrt{\quad}\,dxdy\\
&= -\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial z}\varphi_y+\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy
\end{aligned}$$

ここで, 次の D 上の関数 F を考える（f は $\mathbb{R}^3$ の関数だった）.

$$F(x,y)=f(x,y,\varphi(x,y))$$

すると, 合成関数の微分公式から $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= -\iint_D\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dxdy\\
&= -\iint_D\frac{\partial F}{\partial y}\,dxdy\\
&= \int_{\partial D}F\,dx \qquad\qquad \text{グリーンの定理 による}\\
&= \int_{\partial S}f\,dx
\end{aligned}$$

最後の等式では,

$$\partial D\text{ の座標：}(x(t),y(t))\qquad\text{と}\qquad\partial S\text{ の座標：}(x(t),y(t),\varphi(x(t),y(t)))$$

の対応の下, ∂D に沿う F の積分 が ∂S に沿う f の積分 に等しいことによる. □

【グリーンの定理】平面内の, 区分的に滑らかな閉曲線に囲まれた閉領域 D に関して

$$\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

ストークスの定理の証明：　ベクトル場 $\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ の各成分 X_i について,

補助定理で $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ を巡回する.

$f = X_1$ とすると

$$\int_S \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 \cdot \overrightarrow{n} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n} \right) dS = \int_{\partial S} X_1 \, dx_1$$

$f = X_2$ とすると

$$\int_S \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_3 \cdot \overrightarrow{n} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_1 \cdot \overrightarrow{n} \right) dS = \int_{\partial S} X_2 \, dx_2$$

$f = X_3$ とすると

$$\int_S \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 \cdot \overrightarrow{n} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \cdot \overrightarrow{n} \right) dS = \int_{\partial S} X_3 \, dx_3$$

この３式を辺々足す.
左辺は

$$\int_S \left[\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \right] \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

これは $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\ \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{n} \, dS = \int_S \mathrm{rot}\ \overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{S}$ である.

右辺は, 曲線 ∂S の座標　$\boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$　を使うとき

$$dx_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t} dt, \qquad dx_2 = \frac{\partial r_2}{\partial t} dt, \qquad dx_3 = \frac{\partial r_3}{\partial t} dt,$$

と変数変換することから, 右辺の３式の和は線積分 $\displaystyle\int_{\partial S} \overrightarrow{X} \cdot d\boldsymbol{r}$ である.　$\square$