

解析学（山田） 微分方程式の補足

Clairaut の微分方程式

次の形をした微分方程式を Clairaut(クレロー) の微分方程式という.

$$y = xy' + f(y')$$

この解の様子は次のようになる：

[一般解] $y = Cx + f(C)$ (C は定数) $\cdots$ 直線族.

[特異解] 次のようなパラメータ表示をもつ曲線.

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f(p) \end{cases}$$

公式の覚え方：一般解は y' を C に書き換える. 特異解は y' を p , $x = -f'(p)$ と置き換える.

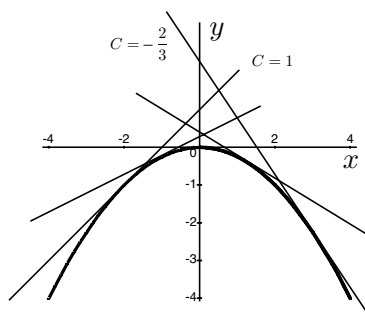
特徴：特異解の曲線の“接線の集合”が一般解の直線族,
一般解の直線族の“包絡線”が特異解の曲線, という関係.

証明の概要： $y' = p$ として p を x, y を動かすパラメータとみなす. すると方程式は $y = xp + f(p)$ となり, x で微分すると $y' = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} \cdot f'(p)$. $y' = p$ だから $\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0$ を得る. $\frac{dp}{dx} = 0$ であれば p は定数となり一般解を, $x + f'(p) = 0$ から特異解を得る.□

例： $y = xy' + (y')^2$ の解は,

[一般解] $y = Cx + C^2$ (C は定数) および

[特異解] パラメータ表示 $\begin{cases} x = -2p \\ y = -p^2 \end{cases}$ をもつ曲線, つまり $y = -\frac{1}{4}x^2$.



注意：例えば $y = xy' + (y')^2$ で初期値 $y(0) = y'(0) = 0$ としたとき, 解は唯一ではない. 2つの解 $y = 0$ と $y = -\frac{1}{4}x^2$ が存在する. この方程式は正規形 (p.158) ではない.

参考：「応用解析要論」青木・池田著, 培風館.

Euler の微分方程式

次の斉次形 線形微分方程式を Euler の微分方程式という.

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \quad (a, b \text{ は実数}, x > 0)$$

この方程式は, 次のようにして解くことができる.

アイデア: $X = \log x$ (つまり $x = e^X$) と変数を変換して, X の関数としての $y(X)$ を先に求める.

$$\frac{dy}{dX} = \frac{dx}{dX} \cdot \frac{dy}{dx} = e^X \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dX^2} = \frac{d}{dX} \left(\frac{dy}{dX} \right) = \frac{d}{dX} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dx}{dX} \cdot \frac{dy}{dx} + x \frac{dx}{dX} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = x \cdot \frac{dy}{dx} + x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

により, もとの方程式は X の関数としての $y = y(X)$ の方程式

$$\frac{d^2 y}{dX^2} + (a-1) \frac{dy}{dX} + by = 0$$

となる. これは定数係数の線形微分方程式なので解くことができる.

$$\text{例: } x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (x > 0)$$

上記の方法で ($X = \log x$ と変数変換して) X の関数としての $y(X)$ の方程式に直すと $\frac{d^2 y}{dX^2} - 4 \frac{dy}{dX} + 4y = 0$. この一般解は $y = c_1 e^{2X} + c_2 X e^{2X}$. 変数を x に戻して, 一般解は $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \log x$ (c_1, c_2 は定数).

2 階線形微分方程式の “もう一方の基本解”

2 階線形微分方程式 $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ の解は, 微分可能な関数のなす線形空間の中の 2 次元の部分空間である. つまり, 一般解は $y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$ (c_1, c_2 は定数) の形となる, この $u_1(x), u_2(x)$ が基本解である.

さて, 何らかの工夫で基本解の 1 つ $u_1(x)$ が得られたとき, もう一方の基本解 $u_2(x)$ を得る方法として, 次の公式がある.

$$u_2(x) = u_1(x) \int \frac{1}{u_1(x)^2} e^{-p_1(x)} dx$$

証明は, 解の一つ $u_2(x) = A u_1(x)$ の定数 A を関数とみなす「定数変化法」による.