解析学（山田）　　収束判定, 級数 についての補足事項

教科書に書いてないことを中心に

$\boxed{1}$ 「$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$」 の意味は「限りなく大きくなっていく」では あいまい.

正確には「$\forall M \in \mathbf{R}, \exists N \in \mathbf{N}\,\mathrm{s.t.}\, n > N \Rightarrow a_n > M$」つまり,

「与えられたどんな（に大きな）数 M に対しても, ある項
第 N 項 <u>より後の</u> <u>全ての</u> 項 a_n が $a_n > M$ をみたす.」

N は M を与えられた後で（言い返すかのように）決めてよいことに注意.

問：次の２種類の数列に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ かどうか判定せよ.

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が } 100 \text{ の倍数}) \\ n & (\text{それ以外}) \end{cases}. \qquad a_n = \begin{cases} n & (n \text{ が } 100 \text{ の倍数}) \\ 2^n & (\text{それ以外}) \end{cases}.$$

$\boxed{2}$ “同程度（の発散）” $(\sim)$ という考え方

２つの数列 a_n, b_n が共に ∞ に発散していて（または共に 0 に収束していて）
$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ であるとき $a_n \sim b_n$ と書く.

問：$a_n = \dfrac{4n^3 + 2n\sqrt{n}}{3n^5 - 7n^4}$ 　とするとき 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束を判定せよ.

(判断) 分子 $4n^3 + 2n\sqrt{n} \sim n^3$, 分母 $3n^5 - 7n^4 \sim n^5$ であるから a_n は $\dfrac{n^3}{n^5} = \dfrac{1}{n^2}$ と同程度. よって収束.

(証明) n が十分大きいとき $n\sqrt{n} < n^3$ また $7n^4 < \frac{1}{2}(3n^5)$. この２つが共に成り立つような最小の自然数を N とおく（実は $N = 5$）と, $N \leq n$ では

$$a_n = \frac{4n^3 + 2n\sqrt{n}}{3n^5 - 7n^4} < \frac{4n^3 + 2n^3}{3n^5 - \frac{1}{2}(3n^5)} = 4\frac{1}{n^2}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{N-1} a_n + 4\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

１項目は有限和で, ２項目の Σ は収束するから, この級数も収束する.

$\boxed{3}$ “しりとり型” の消去

問：級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$ の値.　ヒント：$\frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ から

$$\text{和} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \cdots$$

次の計算との違いは何か？

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2^n + 2^{n+1}) = (-1+2) + (-2+4) + (-4+8) + \cdots + (-2^n + 2^{n+1}) + \cdots$$

$\boxed{4}$ 数列 a_n が 0 に収束する正の単調減少数列のとき, “交代級数”

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \ = \ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2k-1} - a_{2k} + \cdots$$

が収束することを示せ.

ヒント：$A_N := \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n$ について, N の偶奇で分けて考える.

$\boxed{5}$ ダランベールの収束判定の分かれ目をさらに見極める.

問：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ （ちょうど）の時にはどうなるというのか？

[対数判定法] $\lim_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = L$ となるとき,

$L > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束, $L < 1$ ならば $\sum a_n$ は発散.

例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\Sigma_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}$ の収束を判定せよ.

＊「ここが分かれ目」と聞けば, その分かれ目の上でも判定できる例を両側について知りたいし, 判定法も知りたいのが 好奇心 というもの. 今度は $L = 1$ が分かれ目かぁ.

$\boxed{6}$ **スターリングの公式**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$$

(1) どんな時に使えるのか と (2) 覚え方 を考えてみて下さい.

例：$\sum\frac{(2n)!}{n\cdot 2^{2n}\cdot(n!)^2}$ の収束を判定せよ. （ダランベール は効かない）

$\boxed{7}$ 論理 ：次のことは正しいか？

（１）級数 Σa_n が 絶対収束 すれば級数 Σa_n^2 も 収束 する.

（２）級数 Σa_n が 収束 すれば級数 Σa_n^2 も 収束 する.

$\boxed{8}$ 次の級数が収束するかどうか判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^{n^2}$ $(a,b,c,d>0)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{(1.1)^n}$ $(\alpha>0)$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

$\boxed{9}$ 収束半径を求めよ.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!-3^n} x^n \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$$

$\boxed{10}$ $x=0$ で整級数展開し, 一般項を求めよ.

$$(1)\ \cos 2x \qquad (2)\ \sin^2 x \qquad (3)\ \frac{e^x-x-1}{x^2} \qquad (4)\ \frac{\sin x-\sinh x}{x^3}$$

補足：(3) や (4) の, $x \to 0$ での極限も求めてみよ. （前期に別の方法で...）

$\boxed{11}$ $x=0$ での整級数展開の, 0 以外の数項（４項ぐらい）を具体的に求めよ.

$$(1)\ e^{2x}\sin 3x \qquad (2)\ \frac{e^x}{1-x} \qquad (3)\ e^{\sin x} \qquad (4)\ \log(1+\sin x)$$

【方法】次数の低いところから抽出していく計算：

・$(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)$
$\quad = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$

・$a_0+a_1(b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)+a_2(b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)^2+\cdots$
$\quad = a_0+a_1b_1x+(a_1b_2+a_2b_1^2)x^2+\cdots$

$\boxed{12}$ いろんな値で整級数展開

$\dfrac{x+1}{x^2+3x}$ について, 次の各値を中心とする整級数展開を求めよ.

$$(1)\ x=1 \text{ (Text p.157)} \qquad (2)\ x=-1 \qquad (3)\ x=2$$

【方法】まず部分分数に分解： $\dfrac{x+1}{x^2+3x} = \dfrac{x+1}{x(x+3)} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x+3}$.

$x=1$ の場合, $x=1+h$ とおき（つまり $h=(x-1)$）,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+h}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4+h} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-h)}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{4}h)} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left\{1+(-h)+(-h)^2+(-h)^3+\cdots\right\} \\
&\quad +\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left\{1+(-\frac{1}{4}h)+(-\frac{1}{4}h)^2+(-\frac{1}{4}h)^3+\cdots\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4^n}\right)h^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6}\left(2+\frac{1}{4^n}\right)(x-1)^n
\end{aligned}$$

$\boxed{13}$ 項が “飛び飛びの” の級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n^2)}$ について, (1) $x=0.1$ のとき, その値を小数第５０位まで求めよ.

(2) $x=\pm 1$ のとき, 収束するかどうか考えよ.

(3) この級数の収束半径を推測せよ. ヒント：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1.

$\boxed{14}$ 整級数展開から関数を復元, 級数にも使える.
(i) の整級数を与える関数を求め, (ii) の級数の値を求めよ.

(1) (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 2)^n}{n!} = 1+\log 2+\frac{(\log 2)^2}{2}+\frac{(\log 2)^3}{6}+\cdots$

(2) (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4-\frac{1}{720}\left(\frac{\pi}{4}\right)^6+\cdots$

(3) (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\cdots$

(4) (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}}{4^n(2n-1)!} = \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^4}{4^2\cdot 3!}+\frac{\pi^6}{4^3\cdot 5!}-\frac{\pi^8}{4^4\cdot 7!}+\cdots$

$\boxed{\text{補}}$ **定理：条件収束する数列は，項の順序変更によって 任意の値に収束させることができる．**（リーマン）

あなたの好きな実数を決めて下さい. それを α とします.

今から級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を作ります. 方法は次の通り：

正の群：	$1,$	$\frac{1}{3},$	$\frac{1}{5},$	$\frac{1}{7},$	$\frac{1}{9},$	$\cdots,$	$\frac{1}{2n-1},$	$\cdots$
負の群：	$-\frac{1}{2},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{6},$	$-\frac{1}{8},$	$-\frac{1}{10},$	$\cdots,$	$-\frac{1}{2n},$	$\cdots$

○ 各項 a_n は上の２つに群わけされたリストにある数を 全て, 一度づつ, 使っていきます. 一度使った数は二度は使いません.
計算したいのは 総和 です. ただ, 項の順序を調節をするわけです.

○ 正, 負の各群の中ではそれぞれ, 左から順（絶対値の大きい順）に使っていき, 飛び抜かし や 逆戻り はさせません.
（例えば $a_1=1$ としたなら a_2 は $\frac{1}{3}$ か $-\frac{1}{2}$ のいずれかとなります. ）

○ 便宜上 $a_0=0$ として, a_1 からは順に次の規則で a_n を決めていきます：
$S_n := \displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_i$ とし,
$S_{n-1}\leqq\alpha$ ならば a_n は正の群から, $S_{n-1}>\alpha$ ならば a_n は負の群から,
選ぶ. （“目標の値 α より小さいときは足し算, 大きいときは引き算” という方針）

さて, このとき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ はどうなるでしょうか？

$\boxed{\text{補}}$ 前の問題と同じ操作をを次のリストでやったらどうなるでしょうか（Text p.143）

正の群：	$\frac{1}{2},$	$\frac{1}{4},$	$\frac{1}{8},$	$\frac{1}{16},$	$\cdots,$	$\frac{1}{2^n},$	$\cdots$
負の群：	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{1}{9},$	$-\frac{1}{27},$	$-\frac{1}{81},$	$\cdots,$	$-\frac{1}{3^n},$	$\cdots$