解析学　　$y'' + ay' + by = Q(x)$ の解法（山田）

[**特殊解 $Y(x)$ の求め方（未定係数法）**]

(Step1) まず $y'' + ay' + by = 0$ の基本解 $Y_1(x), Y_2(x)$ を確保.（特性方程式を利用）.

(Step2) $Q(x)$ が和 $Q_1(x) + Q_2(x)$ の形だったら各々に分けて求めてもよい.
（$Q(x)$ が $* \cdot e^{cx}$ の形の場合, $y(x) = p(x)e^{cx}$ とおいて $p(x)$ の微分方程式に書き換え, $p(x)$ を解くとして Step1 から再スタート：これは, 慣れてきたら省略）.

【予告】　$Q(x)$ が Step1 の解になっている場合が難しい. → Step4

(Step3) $Q(x)$ の形に応じて次の "暫定候補" を立てる. $\alpha_n, ..., \alpha_0$ や α, β とおくのは未定係数.

(3-1) $Q(x) =$（n 次式）の場合（注：定数$=0$ 次式）, 暫定候補は
$$Y(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$
(次数を合わせることに注意）.

(3-2) $Q(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$　(a, b 定数）の場合, 暫定候補は
$$Y(x) = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x.$$
($\sin, \cos$ は 1 対なので 両方 使う. ω は $Q(x)$ の中と同じものを使う.)

(Step4) 準備した暫定候補 $Y(x)$ と Step1 の**解が重なっていたら, 暫定候補に** x **をかけ**たもの（1回とは限らない）を正式な候補とする. そうでない場合は暫定候補をそのまま正式候補にする.

"正式候補" を新たに $Y(x)$ と書いて次のステップへ.

(Step5) 正式候補 $Y(x)$ を方程式に代入し具体的に計算し未定係数 $\alpha_n, ..., \alpha_0$ や α, β を確定する. これで特殊解 $Y(x)$ が得られる.

(Step6) Step2 で「再スタート」をした場合は, $p(x)$ の方程式の特殊解 $P(x)$ を使って $Y(x) = P(x)e^{cx}$ としたものが もとの方程式の特殊解.

[**一般解 $y(x)$ の求め方**]

$y'' + ay' + by = Q(x)$ の一般解 $y(x)$ は, 線形微分方程式の基礎定理により, 特殊解 $Y(x)$ と Step1 の基本解 $Y_1(x), Y_2(x)$ を使って

[一般解]　$y(x) = Y(x) + c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x)$　　　(c_1, c_2 は定数）.

定数 c_1, c_2 は <u>初期条件</u> が（2つ）与えられていれば定まる.

$\boxed{y'' - 4y' + 3y = (12x+2)e^x \text{ の 一般解：解法}}$

(Step1) $y'' - 4y' + 3y = 0$ の特性方程式 $t^2 - 4t + 3 = 0$ の解は $t = 1, 3$.
基本解は e^x と e^{3x}.

(Step2) 右辺 $Q(x) = (12x+2)e^x$ の形から $y(x) = p(x)e^x$ とおく（∗）.

$$
\begin{aligned}
y &= pe^x \\
y' &= p'e^x + pe^x &&= (p'+p)e^x \\
y'' &= p''e^x + p'e^x + p'e^x + pe^x &&= (p'' + 2p' + p)e^x
\end{aligned}
$$

により $y'' - 4y' + 3y = \{(p'' + 2p' + p) - 4(p' + p) + 3p\}e^x = (p'' - 2p')e^x$.
これ $= (12x+2)e^x$. となるには, $p(x)$ の 微分方程式.

$$p'' - 2p' = 12x + 2$$

を解けば良い. 以下, この方程式を解く.（→ Step6 を忘れずに.）

(step1) $p'' - 2p' = 0$ の特性方程式 $t^2 - 2t = 0$ の解は $t = 0, 2$.
基本解は 1 と e^{2x}.

(step2) 右辺 $Q(x)$ は和の形ではあるが, 多項式なので分けずに解く.

(step3) $Q(x) = 12x + 2$ が 1 次式なので暫定候補も 1 次式とする：$P(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$.

(step4) **解が１つ重なっている!**

暫定候補で $\alpha_1 = 0, \alpha_0 = 1$ とおくと 1 となり,
（p についての）step1 の一方の基本解となる.

上の暫定候補に x をかけて正式候補とする.

$$P(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_0 x.$$

(step5) 正式候補 $P(x)$ について $\begin{aligned} P &= \alpha_1 x^2 + \alpha_0 x \\ P' &= 2\alpha_1 x + \alpha_0 \\ P'' &= 2\alpha_1 \end{aligned}$ により,

$$P'' - 2P' = 2\alpha_1 - 2(2\alpha_1 x + \alpha_0) = -4\alpha_1 x + (2\alpha_1 - 2\alpha_0)$$

これ $= 12x + 2$ となるには $\begin{cases} -4\alpha_1 &= 12 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_0 &= 2 \end{cases}$

解いて $\alpha_1 = -3, \alpha_0 = -4$. よって, 特殊解 $P(x) = -3x^2 - 4x$.

(Step6) $Y(x)$ と $P(x)$ の関係（∗）を思い出して, 特殊解 $Y(x) = (-3x^2 - 4x)e^x$.
一般解は $\underline{y(x) = (-3x^2 - 4x)e^x + c_1\, e^x + c_2\, e^{3x} \quad (c_1, c_2 \text{ は定数}) \text{[答]}}$

慣れてきたら (Step1) の時点で　$y(x) = (\alpha_1 x^2 + \alpha_0 x)e^x$　とおく.

解析学（山田）
特殊解の練習

練習問題		特殊解	
(1)	$y'' - 4y' + 3y = 3$	[1]	$Y(x) = 1$
(2)	$y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$	[2]	$Y(x) = -e^{2x}$
(3)	$y'' - 4y' + 3y = 12x + 2$	[3]	$Y(x) = 4x + 6$
(4)	$y'' - 4y' + 3y = e^{x}$	[4]	$Y(x) = -\frac{1}{2}xe^{x}$
(5)	$y'' - 4y' + 3y = e^{x} + e^{2x}$	[5]	$Y(x) = -\frac{1}{2}xe^{x} - e^{2x}$
(6)	$y'' - 4y' + 3y = (12x + 2)e^{2x}$	[6]	$Y(x) = -2(6x + 1)e^{2x}$
(7)	$y'' - 4y' + 3y = (12x + 2)e^{x}$	[7]	$Y(x) = -x(3x + 4)e^{x}$
(8)	$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$	[8]	$Y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$
(9)	$y'' - 4y' + 4y = (12x + 2)e^{2x}$	[9]	$Y(x) = x^2(2x + 1)e^{2x}$
(10)	$y'' - 4y' + 3y = 10\cos x$	[10]	$Y(x) = \cos x - 2\sin x$
(11)	$y'' - 4y' + 3y = 10\,e^{x}\cos x$	[11]	$Y(x) = -2e^{x}\,(\cos x + 2\sin x)$
(12)	$y'' - 4y' + 3y = 10(e^{x} + 1)\cos x$	[12]	$Y(x) = \cos x - 2\sin x$ $-2e^{x}\,(\cos x + 2\sin x)$
(13)	$y'' - 4y' + 5y = 10\,e^{x}\cos x$	[13]	$Y(x) = 2e^{x}\,(\cos x - 2\sin x)$
(14)	$y'' - 4y' + 5y = 10\,e^{2x}\cos x$	[14]	$Y(x) = 5xe^{2x}\,\sin x$
(15)	$y'' - 4y' + 13y = 26\,e^{x}\sin 2x$	[15]	$Y(x) = e^{x}\,(2\cos 2x + 3\sin 2x)$
(16)	$y'' - 4y' + 13y = 6\,e^{2x}\cos 3x$	[16]	$Y(x) = xe^{2x}\,\sin 3x$