

線形といえば (by 山田)

「線形○○」「1次○○」と言ったら、

足し算 (+) とスカラー倍 について何か条件を課した

と心得るべし。教科書の索引を使って、いろいろな用語の意味（課した条件）を調べよ。ここではいくつかまとめておく。以下では V, W などは空集合ではないとする。

① V を \mathbb{R}^n (n 次元ベクトル空間) とする。次の2つの演算に注目する。

(1) 和 が定義されている。つまり

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$$

「 \mathbf{a}, \mathbf{b} が V に属すならば、和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ も V に属す」

厳密に数式記号を用いると $\forall \mathbf{a}, \forall \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ であるが、「 \Rightarrow “ならば”」は“である全ての場合に”と解釈して通常「 \forall “任意の”」は省略される。以下では全て省略形で述べる。

(2) スカラー倍 が定義されている。つまり

$$k \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V \Rightarrow k\mathbf{a} \in V$$

(1+2: 合わせ技) V 内で1次結合が定義される。つまり

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in V \Rightarrow k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 \in V$$

・ $k_1 = k_2 = 1$ にすれば条件 (1) を、 $k_2 = 0$ にすれば条件 (2) を導く。

● 2つの演算“足し算”と“スカラー倍”を定義された集合を **線形空間** という。

② \mathbf{a} が $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ の **1次結合** であるとは、

n 個のスカラー c_1, c_2, \dots, c_n が存在して
 $\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n$ と表わされること。

③ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ の **1次関係式** とは、それらの1次結合で $\mathbf{0}$ を表す

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$$

の形の式のこと。すべての係数 c_i が0 のとき「**自明な1次関係式**」という。逆に、少なくとも1つの係数が0 でないとき「**非自明な1次関係式**」という。

④ (V 内で) ベクトルの集合 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ が **1次独立** であるとは、

「『 $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ ならば $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ 』が成り立つ」こと
言い換えると

「 $c_1 = \dots = c_r = 0$ 以外では $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$ は成り立たない」こと

を表す。スカラーの $0 \in \mathbb{R}$ とゼロベクトル $\mathbf{0} \in V$ の区別に注意。1次独立でないことを1次従属という。つまり、 r 個の元 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ が **1次従属** であるとは、

「 $c_1 = \dots = c_r = 0$ 以外で $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{0}$
となる係数 c_1, c_2, \dots, c_r が存在する」こと

を表す。つまり「**非自明な1次関係式が存在する**」ことを表す。

$r = 2$ (2個 \mathbf{a}, \mathbf{b}) のとき:

\mathbf{a} と \mathbf{b} が1次従属 $\Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$ または $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ または $\exists c, \mathbf{a} = c\mathbf{b}$ (平行) .

$r = 3$ (3個 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$) のとき: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が1次従属となるのは、

- ・ 3つのうち少なくとも1つが $\mathbf{0}$,
- ・ 3つのうちある2つまたは3つ全てが平行,
- ・ $\mathbf{a}_3 = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ の形の関係式が成り立つ,

のいずれかの場合であるが、“場合”で説明するのは面倒。

例1: \mathbb{R}^3 内で $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の3つは1次独立。なぜなら

$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ を解くと $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となるため。

例2: \mathbb{R}^3 内で $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ の3つは1次従属。なぜなら

非自明な1次関係式 $-7\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ が成り立つ。

⑤ \mathbb{R}^n 内の (or 線形空間 V の) 空でない部分集合 W が V の **線形部分空間** であるとは、次の3条件が成り立つこと

(0) $\mathbf{0} \in W$

(1) W が 和 に関して閉じている。つまり $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$

(2) W が スカラー倍 に関して閉じている。つまり $k \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in W \Rightarrow k\mathbf{a} \in W$

(1+2: 合わせ技) W が1次結合に関して閉じている。つまり

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in W \Rightarrow k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 \in W$$

例1: $V = \mathbb{R}^n$ とする. $m \times n$ 行列 A に対して, $Ax = \mathbf{0}$ の解の集合 $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \mathbf{0}\}$ は \mathbb{R}^n の部分空間となる.
これを「 $Ax = \mathbf{0}$ の解空間」という.

例2: $V = \mathbb{R}[x]_n$ (n 次以下の多項式のなす線形空間) のとき $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $X_\alpha := \{f \in \mathbb{R}[x]_n \mid f(\alpha) = 0\}$ とする. X_α は $\mathbb{R}[x]_n$ の部分空間である.

6 V 内で a_1, a_2, \dots, a_r が生成する部分空間 (張られる部分空間) (記号は $\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$) とは, a_1, a_2, \dots, a_r の1次結合の集合, つまり

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle = \{c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_r a_r \mid \text{各 } c_i \in \mathbb{R}\}.$$

「 a_1, a_2, \dots, a_r が V を生成する」とは $\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle = V$, つまり「 V に属す任意のベクトルが a_1, a_2, \dots, a_r の1次結合で表される」こと.

・ $m \times n$ 行列 A の列ベクトル分割 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ に対して

$$C(A) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

は \mathbb{R}^m の部分空間であり「 A の列空間」という.

7 線形空間の基底と次元.

線形空間 V 中の有限個のベクトルの組 $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ が,

- (1) V を生成し なおかつ (2) 1次独立

のとき, \mathcal{B} を V の基底という. 実は, 次のことが成り立つ.

定理: 線形空間 V が, 有限個のベクトルからなる基底をもつとき, 基底の取りかたは何通りもあるが, 基底をなすベクトルの個数は変化しない.

そこで, この「ベクトルの個数」を V の次元 ($\dim V$) という.

(0次元 は点, 1次元 は線, 2次元 は面, 3次元 は空間, ...)

例: $V = \mathbb{R}^n$ (次元は n) のとき, e_i を「 i 番目のみ1で他が全て0のベクトル」とすると $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ は \mathbb{R}^n の標準基底と呼ばれる.

$$\mathbb{R}^3 \text{ の標準基底: } \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

8 V, W は線形空間とする. 写像 $f: V \rightarrow W$ が線形写像であるとは, f が次の条件をみたすこと

(1) f は和を保つ. つまり「和の像は像の和」+ が外に出せる.

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \text{in } W$$

左辺の+は V 内の和, 右辺の+は W 内の和, 同じものではない.

(2) f はスカラー倍を保つ. つまり「 k 倍の像は像の k 倍」定数倍が外に出せる.

$$f(ka) = kf(a) \quad \text{in } W$$

(1+2: 合わせ技): f は1次結合を保つ.

$$f(k_1 a_1 + k_2 a_2) = k_1 f(a_1) + k_2 f(a_2) \quad \text{in } W$$

例1: 行列の定める写像. $m \times n$ 行列 A に対して

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto y = f_A(x) = Ax.$$

例2: 微分

$$\frac{d}{dx}: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{df}{dx}.$$

$(f+g)' = f' + g'$ や $(cf)' = cf'$ ($c \in \mathbb{R}$) と習っただろう.

線形空間の例 — \mathbb{R}^n だけではない —

2つの演算“和”と“スカラー倍”を定義された集合を線形空間という.

例1: 平面や空間のベクトルの集合としての \mathbb{R}^2 (2次元), \mathbb{R}^3 (3次元), それらの一般化としての \mathbb{R}^n (n 次元).

例2: x に関する n 次以下の多項式の集合

$$\mathbb{R}[x]_n = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\} \quad (n+1 \text{次元}).$$

例3: $m \times n$ 行列の集合 $M_{m \times n}$ (mn 次元).

例4: \mathbb{R} 上の C^∞ (あるいは C^n) 級関数の集合 $C^\infty(\mathbb{R}), C^n(\mathbb{R})$, (次元は無限).

「線形○○」「1次○○」のような用語は本来, 一般の線形空間について定義される.

空間図形：直線と平面

直線の式： 点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通る, 方向ベクトル $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ の直線の式

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

ただし v_1, v_2, v_3 の中に 0 がある場合は式を变形する.

(例 $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-6}{3}$ とはせず $\frac{x-4}{1} = \frac{z-6}{3}, y=5$ とする.)

注意：見かけの違う式が同じ直線を表すことがある.

考え方： $\vec{OX} = \vec{OA} + t\mathbf{v}$ ($t \in \mathbb{R}$) と表せる点 $X(x, y, z)$ の集合と考える.

平面の式： 点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を含む, 法線ベクトル $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ の平面の式

$$v_1(x - a_1) + v_2(y - a_2) + v_3(z - a_3) = 0$$

变形すると $v_1x + v_2y + v_3z = v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3$

左辺は 1 次式で, 右辺は定数.

考え方： $\mathbf{v} \perp \vec{AX}$ つまり $\mathbf{v} \cdot \vec{AX} = 0$ となる点 $X(x, y, z)$ の集合と考える.

点と平面の距離の公式： 点 (x_0, y_0, z_0) と 平面 $ax + by + cz = d$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

考察：点が平面上にあれば距離は 0. 公式の分子が 0 になることと対応している.

チェック項目

- (A1) 3 点を含む平面の式を求める.
- (A2) 交わる平面と直線の式が与えられたとき, 交点の座標を得る.
- (A3) 直線の式とその上にない点の座標が与えられたとき, それらを含む平面の式を得る.
- (A4) 交わる 2 直線の式が与えられたとき, 交点の座標を得る.
- (A5) 交わる 2 平面の式が与えられたとき, 交線の式を得る.
- (A6) 交わる 2 直線 あるいは 平行な 2 直線の式が与えられたとき, それらを含む平面の式を得る.

(B1) 2 つの直線の式が与えられたとき, 位置関係を判断する.
一致 / 平行 / 交わる / ねじれの位置

(B2) 2 つの平面の式が与えられたとき, 位置関係を判断する.
一致 / 平行 / 交わる

(B3) 直線の式と平面の式が与えられた時, 位置関係を判断する.
含まれる / 平行 / 交わる

(C1) 点の座標と直線の式から「点と直線の距離」を求める.

(C2) 点の座標と平面の式から「点と平面の距離」を求める.

(C3) 平行な 2 直線 または 2 平面の式から, その「幅」を求める.

(C4) ねじれの位置の 2 直線の式から「最短距離」を求める.

(C5) 交わる 直線と平面 の式から, その 直線と平面のなす角 を求める.

(C6) 交わる 2 平面の式から, その 2 平面のなす角 を求める.

(D) ねじれの位置の 2 直線の式から「最短距離を与える 2 点」の座標を求める.

練習問題： xyz -空間内で, 点の座標 や 直線・平面の式を次の通りとする.

点 A : $(4, -7, 0)$

直線 l : $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{3}$ m_1 : $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-3}{-6}$

m_2 : $\frac{x-3}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-8}{1}$ m_3 : $\frac{x}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1}$

平面 α : $x - 2y + 3z = 6$ β : $x - y - z = -11$

γ_1 : $2x - 4y + 6z = 6$ γ_2 : $2x - 4y + 6z = 12$

(a2) 直線 l と平面 α の交点の座標を求めよ.

(a3) 直線 l と点 A を含む平面の式を求めよ.

(a4) 交わる 2 直線 l と m_2 の交点の座標を求めよ.

(a5) 交わる 2 平面 α と β の交線の式を求めよ.

(a6) 交わる 2 直線 l と m_2 を含む平面の式を求めよ.

(b1) 直線の組 4 種類 : l と m_1 / m_2 と m_3 / m_1 と m_2 / m_1 と $m_3 /$ の位置関係を述べよ.

(b2) 平面の組 3 種類 : α と β / α と γ_1 / α と $\gamma_2 /$ の位置関係を述べよ.

(b3) 直線と平面の組 3 種類 : l と α / m_2 と β / m_3 と $\beta /$ の位置関係を述べよ.

(c1) 点 A と 直線 l の距離を求めよ.

(c2) 点 A と 平面 α の距離を求めよ.

(c3) 平行な 2 直線 m_2 と m_3 , また 平行な 2 平面 γ_1 と γ_2 の幅を求めよ.

(c4) ねじれの位置の 2 直線 l と m_3 の間の最短距離を求めよ [外積を用いるのが早い]

(c5) 交わる 2 平面 α と β のなす角を求めよ.

(c6) 直線 l と平面 α のなす角を φ_1 とするとき $\cos \varphi_1$ を求めよ.

直線 l と平面 β のなす角を φ_2 とするとき $\cos \varphi_2$ を求めよ.

(d) ねじれの位置の 2 直線 l と m_3 について最短距離を与える 2 点の座標を求めよ.

外積 (ベクトル積) (by 山田)

1 定義 \mathbb{R}^3 の2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して, 次のベクトルを \mathbf{a} と \mathbf{b} の外積 (ベクトル積) とよび $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と表す.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} \quad \text{覚え方}$$

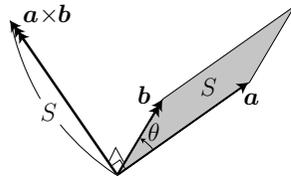
$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & \dots\dots\dots(3) \\ a_2 & b_2 & \dots(1) \\ a_3 & b_3 & \dots\dots(2) \\ a_1 & b_1 & \end{matrix}$$

例: $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{bmatrix}$.

2 幾何的性質

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の方向は, \mathbf{a} と \mathbf{b} の両方に直交する.
- (2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の長さは, \mathbf{a} と \mathbf{b} とで定まる平行四辺形の面積である.
- (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きは, \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ がこの順に右手系.

この3つの性質で $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は特徴つけられる.



3 公式

- (1) [線形性] $(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = c_1(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + c_2(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b})$.
 $\mathbf{a} \times (d_1\mathbf{b}_1 + d_2\mathbf{b}_2) = d_1(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1) + d_2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_2)$.
- (2) [交代性] $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. 特に, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- (3) [ラグランジュの公式] \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角を θ とすると
 $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta)^2$.
- (4) [結合法則をみたまない] 一般に $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

例: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 一方 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

外積 の利用例

【問1】 (a1) 3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ を含む平面の式を求めよ.

解説: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ が法ベクトル (の1つ) で, 点A を通っているから $6(x-1) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0$. 整理して $6x + 3y + 2z = 6$. (答) この平面の式は $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ と表示しておくとう確認しやすい. (図を描いてみよ.)

【問2】 (c4) ねじれの2直線 l と m の最短距離を求めよ.

$$l: \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-6}{3}, \quad m: \frac{x}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-4}{1}$$

解説: 最短距離を与える l, m 上の点を求めなくて良い場合は, 次の方法が早い.

- (1) m を含み, l と平行な平面 α の式を求める.
- (2) l 上の点と平面 α の距離を求める.

(1) 平面 α の法ベクトルは, 2直線 l, m の方向ベクトル \vec{v}_l, \vec{v}_m のどちらとも垂直.

そのようなベクトルは外積で求められる: $\vec{v}_l \times \vec{v}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

α は m を含み m 上に点 $(0, -4, 4)$ があるので α の式は

$$-(x-0) + 5(y+4) - 3(z-4) = 0, \quad \text{整理して} \quad x - 5y + 3z = 32.$$

(2) l 上に点 $(4, 5, 6)$ があるので l から α への距離は

$$\frac{|4 - 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 - 32|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \sqrt{35}. \quad (\text{答})$$

【問3】 (a5) 2平面 α と β の交線 l を求めよ.

$$\alpha: x - 2y + 3z = 6, \quad \beta: x - y - z = -11$$

解説: 求める交線 l の方向ベクトル \vec{v} は, 2平面の法ベクトルの両方に垂直. 外積で求められる:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

l は平面 α, β の両方に属す点 $(-28, -17, 0)$ を通る, 方向ベクトル \vec{v} の直線

$$l: \frac{x+28}{5} = \frac{y+17}{4} = \frac{z}{1}. \quad (\text{答})$$

注: 連立方程式 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ x - y - z = -11 \end{cases}$ の解が $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ であることと対応.