

行列に対する指数写像 (by 山田)

$\exp(x)$ ($= e^x$; exponential) のテーラー展開

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

の x に正方行列 A を“代入”することにより (また, 1 は単位行列 I に置き換えて)

$$\exp(A) := I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

とする. この無限和は必ず収束することが知られている (難).

基本的な性質

- $\exp(PXP^{-1}) = P\exp(X)P^{-1}$ • $\det(\exp(X)) = \exp(\operatorname{tr} X)$
- $XY = YX$ のとき $\exp(X+Y) = \exp(X) \cdot \exp(Y)$.

特に $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$.

ここで, $\operatorname{tr} X$ (X のトレース) とは X の対角成分の和のこと: $\operatorname{tr} X := \sum_{i=1}^n x_{ii}$.

2×2 行列の基本は次の通り:

$$\begin{aligned} (1) \quad \exp\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} & \exp\left(t\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} \\ (2) \quad \exp\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix} & \exp\left(t\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \\ (3) \quad \exp\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) &= e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ & \exp\left(t\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right) &= e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

特に, $\exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$

もっと大きな行列の場合でも, 対角化 (ジョルダン標準形) と“回転行列化”を駆使して応用すれば $\exp(A)$ が計算ができる.

次の公式が有用. ($(e^{at})' = ae^{at}$ の行列版)

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$$

$\exp(A)$ の計算例

固有値の状況 (2 実解, 重解, 虚数) で場合分け

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad [\text{対角化可能 な場合}]$$

(Step1: A の固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ を解く)

固有多項式は $\det \begin{pmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 11$ である.

$\lambda^2 - 8\lambda + 11 = 0$ を解いて, $\lambda = 4 \pm \sqrt{5}$. これが A の固有値.

(Step2: 各固有値 α_i に対して, 方程式 $A\mathbf{x} = \alpha_i\mathbf{x}$ を解く.)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4 + \sqrt{5}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4 - \sqrt{5}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$$

固有値 $4 \pm \sqrt{5}$ の固有ベクトルが $\begin{pmatrix} \pm 2 \\ \sqrt{5} \mp 1 \end{pmatrix}$ (複号同順)

(Step3: 固有ベクトルを並べた行列を P とすると $AP = P(\text{対角行列})$ の形)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} &= (4 + \sqrt{5}) \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} &= (4 - \sqrt{5}) \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} \quad \text{の 2 式を合成} \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4-\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

下線の行列を P とすると $A = P \begin{pmatrix} 4+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4-\sqrt{5} \end{pmatrix} P^{-1}$.

あとはこれに公式 $\exp(PXP^{-1}) = P\exp(X)P^{-1}$ と基本 (1) を適用すれば良い.

省スペースのため $\alpha = 4 + \sqrt{5}$, $\beta = 4 - \sqrt{5}$ として, 計算すると

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (\sqrt{5}+1)e^\alpha + (\sqrt{5}-1)e^\beta & 2(e^\alpha - e^\beta) \\ 2(e^\alpha - e^\beta) & (\sqrt{5}-1)e^\alpha + (\sqrt{5}+1)e^\beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^4}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (\sqrt{5}+1)e^{\sqrt{5}} + (\sqrt{5}-1)e^{-\sqrt{5}} & 2(e^{\sqrt{5}} - e^{-\sqrt{5}}) \\ 2(e^{\sqrt{5}} - e^{-\sqrt{5}}) & (\sqrt{5}-1)e^{\sqrt{5}} + (\sqrt{5}+1)e^{-\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ \exp\left(t\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (\sqrt{5}+1)e^{\alpha t} + (\sqrt{5}-1)e^{\beta t} & 2(e^{\alpha t} - e^{\beta t}) \\ 2(e^{\alpha t} - e^{\beta t}) & (\sqrt{5}-1)e^{\alpha t} + (\sqrt{5}+1)e^{\beta t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad [\text{ジョルダン標準形の 場合}] \quad (\text{固有値が 重解 の場合の一部})$$

(Step1: A の固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ を解く)

固有多項式は $\det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16$ である.

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ を解いて, $\lambda = 4$ (重解). これが A の固有値.

(Step2: 固有値 α に対して, 方程式 $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ を解く.)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有値 4 の固有ベクトル $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Step2': 固有値 α と 固有ベクトル $\mathbf{v}_1$ に対して, 方程式 $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \mathbf{v}_1$ を解く.)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく. 注: $(A - \alpha I)^2 \mathbf{v}_2 = (A - \alpha I) \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

(Step3: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を並べた行列を P とすると $AP = P$ (ジョ細胞) の形)

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & = & 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{の 2 式を合成} \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

下線の行列を P とすると $A = P \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

あとはこれに公式 $\exp(PXP^{-1}) = P\exp(X)P^{-1}$ と 基本の (2) を適用すれば良い.
計算すると

$$\exp \left(\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2e^4 & -e^4 \\ e^4 & 0 \end{pmatrix}. \quad \exp \left(t \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} te^{4t} + e^{4t} & -te^{4t} \\ te^{4t} & e^{4t} - te^{4t} \end{pmatrix}.$$

$$\text{メモ: } \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad [\text{回転行列化}] \quad (\text{固有値が 虚数 の場合})$$

(Step1: A の固有方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ を解く)

固有多項式は $\det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ -3 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 21$ である.

$\lambda^2 - 8\lambda + 21 = 0$ を解いて, $\lambda = 4 \pm \sqrt{5}i$. これが A の固有値.

(Step2: 固有値 α に対して, 方程式 $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}$ を解く.)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4 \pm \sqrt{5}i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \mp \sqrt{5}i \end{pmatrix}$$

固有値 $4 \pm \sqrt{5}i$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \mp \sqrt{5}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

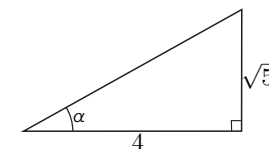
(Step3: 固有ベクトルを, 実部 虚部に分けて並べた行列を P とする)

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & = & 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} & = & -\sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{の 2 式を合成} \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

下線の行列を P とすると $A = P \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$.

注:

$$\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix} = \sqrt{21} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$



ただし α は $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ を満たす角度 (約 29.2 度).

あとはこれに公式 $\exp(PXP^{-1}) = P\exp(X)P^{-1}$ と 基本の (3) を適用すれば良い.
計算すると

$$\begin{array}{l} \exp \left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{e^4}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \cos \sqrt{5} + \sin \sqrt{5} & -2 \sin \sqrt{5} \\ 3 \sin \sqrt{5} & \sqrt{5} \cos \sqrt{5} - \sin \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ \exp \left(t \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{e^{4t}}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \cos \sqrt{5}t + \sin \sqrt{5}t & -2 \sin \sqrt{5}t \\ 3 \sin \sqrt{5}t & \sqrt{5} \cos \sqrt{5}t - \sin \sqrt{5}t \end{pmatrix} \end{array}$$