# 線積分, 面積分の計算例　(by 山田)

「微分積分学」の積分計算は各自で復習して下さい.

**S1. スカラー場の線積分**
曲線 $C: \boldsymbol{r}(t) = (t, t, t^2)$ $(0 \le t \le 1)$ に沿う $f = f(x,y,z) = x + 2yz$
の線積分
$$\int_C f\, dC$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (2t)^2} = \sqrt{2(1+2t^2)}.$$

よって　線素 $dC = \sqrt{2(1+2t^2)}\, dt$.

($C$ の長さは $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2(1+2t^2)}\, dt \;=\; \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $(t = \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\, u$ とおく$)$)

$$f(\boldsymbol{r}(t)) = t + 2 \cdot t \cdot t^2 = t(1+2t^2).$$

$$\int_C f\, dC = \int_0^1 t(1+2t^2)\sqrt{2(1+2t^2)}\, dt = \cdots = \underline{\frac{\sqrt{2}}{10}(9\sqrt{3}-1)}$$

**S2. スカラー場の面積分**
$\triangle \mathrm{ABC} = \{2x + y + z = 2; x, y, z \ge 0\}$ 上で $f = f(x,y,z) = x^2 + y - z$
の面積分
$$\int_{\triangle \mathrm{ABC}} f\, dS$$

$\triangle$ABC を　$z = -2x - y + 2:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 - 2x$　とみなす.
座標として　$\boldsymbol{r}(u,v) = (u, v, -2u - v + 2)$, $(D: 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2 - 2u)$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{6}.$$

よって　面積素 $dS = \sqrt{6}\, dudv$.　($\triangle$ABC の面積は $\displaystyle\int_D \sqrt{6}\, dudv = \sqrt{6}$)

$$f(\boldsymbol{r}(u,v)) = u^2 + v - (-2u - v + 2) = u^2 + 2u + 2v - 2.$$

$$\int_{\triangle \mathrm{ABC}} f\, dS = \iint_D (u^2 + 2u + 2v - 2)\sqrt{6}\, dudv = \cdots = \underline{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

**V1. ベクトル場の線積分**
曲線（らせん）$C: \boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$　$(0 \le t \le \pi/2)$ に沿う
$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2y \\ x \\ \sin^2 z \end{pmatrix}$ の線積分　$\displaystyle\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{t} \rangle dC$

$$\overrightarrow{A} \text{ at } \boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} 2\sin t \\ \cos t \\ \sin^2 t \end{bmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad ds = \sqrt{2}\, dt.$$

$$\overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} = (2\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \sin^2 \cdot 1)dt \;= (1 - 2\sin^2 t)dt$$

$$\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t)\, dt = \cdots = \underline{0}$$

**V2. ベクトル場の面積分**

$\triangle \mathrm{ABC} = \{x + 2y + 2z = 2; x, y, z \ge 0\}$　での $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} xy \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$ の面積分

$$\int_{\triangle \mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\triangle \mathrm{ABC}} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{n} \rangle dS$$

$\triangle$ABC を　$x = -2y - 2z + 2;\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1 - y$　とみなす.
座標としては　$\boldsymbol{r}(u,v) = (2 - 2u - 2v, u, v)$, $(D: 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 - u)$.
$D$ は単位 3 角形 $\triangle_o$ である.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| = 3.$$

向きの確認：法ベクトルの $z$-成分が正なので, この向きでよい.
面積素 $dS = 3\, dudv$.　($\triangle$ABC の面積は $\displaystyle\int_D 3\, dudv = 3/2$)

$$\overrightarrow{A} \text{ at } \boldsymbol{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 2(1-u-v)u \\ -1 \\ v \end{bmatrix}, \qquad \text{ベクトル面積素 } d\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} dudv,$$
$(= \overrightarrow{dS})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} &= \{2(1-u-v)u - 2 + 2v\}dudv \\ &= 2(-u^2 - uv + u + v - 1)dudv \end{aligned}$$

$$\int_{\triangle \mathrm{ABC}} \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D 2(-u^2 - uv + u + v - 1)dudv = \cdots = \underline{-\frac{7}{12}}$$

**V3. ベクトル場の面積分**

上半球面 $S = \{x^2+y^2+z^2=4\,; z \geq 0\}$ での $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ -z \end{pmatrix}$ の面積分

$$\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{n} \rangle dS$$

$S$ を $z = \sqrt{4-x^2-y^2} : x^2+y^2 \leq 4$ とみなす.
座標として $\boldsymbol{r}(u,v) = (u, v, \sqrt{4-u^2-v^2})$, $(D : u^2+v^2 \leq 4)$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -u/z \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v/z \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} u/z \\ v/z \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\|\overrightarrow{N}\| = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{u^2+v^2+z^2}{z^2}} = \frac{2}{z} = \frac{2}{\sqrt{4-u^2-v^2}}.$$

向きの確認：法ベクトルの $z$-成分が正なので, この向きでよい.
面積素 $dS = \dfrac{2\,dudv}{\sqrt{4-u^2-v^2}}$.
（$S$ の面積は $\displaystyle\iint_D \frac{2\,dxdy}{\sqrt{4-u^2-v^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{2r\,dr}{\sqrt{4-r^2}} = 8\pi$（極座標に変換））

$$\overrightarrow{A} \text{ at } \boldsymbol{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 4u \\ 4v \\ -\sqrt{4-u^2-v^2} \end{bmatrix}, \quad d\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} u/\sqrt{4-u^2-v^2} \\ v/\sqrt{4-u^2-v^2} \\ 1 \end{bmatrix} dudv,$$

$$\overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{4u^2+4v^2-(4-u^2-v^2)}{\sqrt{4-u^2-v^2}} dudv = \frac{5u^2+5v^2-4}{\sqrt{4-u^2-v^2}} dudv.$$

$$\begin{aligned} \int_S \overrightarrow{A} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D \frac{5u^2+5v^2-4}{\sqrt{4-u^2-v^2}} ddudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{(5r^2-4)r\,dr}{\sqrt{4-r^2}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{16}{3} = \underline{\frac{32\pi}{3}} \end{aligned}$$

# 微分形式による積分計算例　(by 山田)

「微分積分学」の積分計算は各自で復習して下さい.

**目標**　「ベクトル解析」の計算方法と同じ結果になることを確認する.

**F1. 曲線に沿う１次微分形式の積分**
曲線（らせん）$C : \boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad (0 \le t \le \pi/2)$ に沿う
１次微分形式

$$\mu \;=\; 2y\,dx + x\,dy + \sin^2 z\,dz$$

の積分　$\displaystyle\int_C \mu \;=\; \int_C 2y\,dx + x\,dy + \sin^2 z\,dz$

まず $x, y, z$ 達を（$dx, dy, dz$ も）みな $t$ に変換する.

$$dx \to \frac{dx}{dt}(t)\,dt, \quad dy \to \frac{dy}{dt}(t)\,dt, \quad dz \to \frac{dz}{dt}(t)\,dt$$

この出題の場合

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \\ dz = dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 2\sin t\,(-\sin t)dt \;+\; \cos t\,\cos t\,dt \;+\; \sin^2 t\,dt \\ &= (\cos^2 t - \sin^2 t)dt \quad = (1 - 2\sin^2 t)dt \end{aligned}$$

よって

$$\int_C \mu \quad = \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2 t)dt \;= \cdots = \underline{0}$$

**F2. 曲面に沿う２次微分形式の積分**
上半球面 $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4\,;\, z \ge 0\}$　での ２次微分形式

$$w \;=\; 4x\,dy \wedge dz + 4y\,dz \wedge dx - z\,dx \wedge dy$$

の積分 $\displaystyle\int_S w \;=\; \int_S 4x\,dy \wedge dz + 4y\,dz \wedge dx - z\,dx \wedge dy$

$S$ を　$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} : \; x^2 + y^2 \le 4$　とみなす.
座標として　$\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2}), \; (D : u^2 + v^2 \le 4)$　とする.
向きの確認：法ベクトルの $z$-成分が正なので, この向きでよい.

$x, y, z$ 達を（$dx, dy, dz$ も）みな $u, v$ に変換する. 方法は,

$$dx \;\to\; \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,du + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,dv$$

$y, z$ についても同様.

この問題の場合,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{4 - u^2 - v^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \\ dz = -\dfrac{u}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,du - \dfrac{v}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,dv \end{cases}$$

以下では $\sqrt{4 - u^2 - v^2}$ を短く $\sqrt{\phantom{xx}}$ と表す.

これを使って, $w$ を $u$ と $v$ の２次形式に直す（外積代数 $\wedge$ の性質を使う：
$dv \wedge du = -du \wedge dv$ や $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$ ）と

$$\begin{aligned} w &= 4x\,dy \wedge dz + 4y\,dz \wedge dx - z\,dx \wedge dy \\ &= 4u\,dv \wedge \left(-\frac{u}{\sqrt{\phantom{xx}}}\,du - \frac{v}{\sqrt{\phantom{xx}}}\,dv\right) \\ &\qquad + 4v\left(-\frac{u}{\sqrt{\phantom{xx}}}\,du - \frac{v}{\sqrt{\phantom{xx}}}\,dv\right) \wedge du \quad - \sqrt{\phantom{xx}}\,du \wedge dv \\ &= \left(\frac{4u^2 + 4v^2 - \sqrt{\phantom{xx}}^{\,2}}{\sqrt{\phantom{xx}}}\right) du \wedge dv \quad = \left(\frac{4 + 5u^2 + 5v^2}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\right) du \wedge dv \end{aligned}$$

となるので

$$\int_S w \quad = \iint_D \frac{4 + 5u^2 + 5v^2}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,dudv \;= \cdots = \underline{\frac{32\pi}{3}}$$

最後の段階で 重積分に直すとき, $\wedge$ を削除する.