外積代数（exterior algebra）　(by 山田)

n 次元線形空間 V に対して, V の **r 次 外積代数**　$\wedge^r V$　とは

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_r \qquad (\text{各 } \boldsymbol{v}_i \in V)$$

の形の元を基底とする一次結合の集合に, 次のような同一視と計算を導入した集合である.

(1) **多重線形**　各成分についての線形性.

$$\overset{(1)}{\cdots} \wedge (\alpha \boldsymbol{u}_i + \beta \boldsymbol{v}_i) \wedge \overset{(2)}{\cdots} \quad = \quad \alpha(\overset{(1)}{\cdots} \wedge \boldsymbol{u}_i \wedge \overset{(2)}{\cdots}) + \beta\,(\overset{(1)}{\cdots} \wedge \boldsymbol{v}_i \wedge \overset{(2)}{\cdots})$$

(2) **交代性（歪対称性）**　1 組交換すると (-1) 倍

$$\overset{(1)}{\cdots} \wedge \boldsymbol{v}_i \wedge \overset{(2)}{\cdots} \wedge \boldsymbol{v}_j \wedge \overset{(3)}{\cdots} \quad = \quad (-1)\overset{(1)}{\cdots} \wedge \boldsymbol{v}_j \wedge \overset{(2)}{\cdots} \wedge \boldsymbol{v}_i \wedge \overset{(3)}{\cdots}$$

例：$\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3 = -(\boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_1 = -(\boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \boldsymbol{v}_1)$.

特に, 同じベクトルが含まれているものは $\mathbf{0}$（$\wedge^r V$ の中での）とみなす.

$$\cdots \wedge \boldsymbol{v} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v} \wedge \cdots = \mathbf{0}.$$

$\wedge^r V$ は ${}_nC_r := \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 次元の線形空間である. V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を 1 つ固定すれば, $\wedge^r V$ の基底として,

$$\{\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_r} \qquad (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n)\}$$

がとれる. $\wedge^0 V = \mathbb{R}$, $\wedge^1 V = V$. また $r > n = \dim V$ のとき $\wedge^r V = \{\mathbf{0}\}$ とする. $\wedge^n V$ は 1 次元で　$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$　が基底となる：

$$\wedge^n V \quad = \quad < \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n > .$$

計算例 $(r=2)$　“面積に関係がある”

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2) \wedge (c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) &= ac(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1) + ad(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) + bc(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1) + bd(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_2) \\ &= \mathbf{0} + ad(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) - bc(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) + \mathbf{0} \\ &= (ad - bc)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)\end{aligned}$$

積の交換性　$v \in \wedge^i V$, $w \in \wedge^j V$ のとき,　$v \wedge w$, $w \wedge v \in \wedge^{i+j} V$　で,

$$w \wedge v \;=\; (-1)^{ij}\, v \wedge w$$

幾何学では V よりも, その双対空間 V^* の外積代数 $\wedge^r V^*$（xy-平面上の $dx \wedge dy$ 等）が重要となる.

V を n 次元線形空間とし, 基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ をとる.
通常, 添字集合を表す

$$I_r = \{(i_1, i_2, \cdots, i_r) \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$$

を準備して, r 次外積代数 $\wedge^r V$（$1 \le r \le n$）の元 w を

$$w \quad = \sum_{(i_1, \cdots, i_r) \in I_r} a_{i_1, \cdots, i_r}\; \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_r}$$

のように表す. ここで 各 $a_{i_1, \cdots, i_r} \in \mathbb{R}$.

定義　［コベクトルの r 次外積への r 個のベクトル列の代入］

・ w が 1 つの項からなるとき
$w = \boldsymbol{w}_1^* \wedge \boldsymbol{w}_2^* \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}_r^*$ への $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$ の代入を

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r) &= (\boldsymbol{w}_1^* \wedge \boldsymbol{w}_2^* \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}_r^*)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r) \\ &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^*(\boldsymbol{v}_1) & \boldsymbol{w}_1^*(\boldsymbol{v}_2) & \cdots & \boldsymbol{w}_1^*(\boldsymbol{v}_r) \\ \boldsymbol{w}_2^*(\boldsymbol{v}_1) & \boldsymbol{w}_2^*(\boldsymbol{v}_2) & & \\ \vdots & & \boldsymbol{w}_i^*(\boldsymbol{v}_j) & \vdots \\ \boldsymbol{w}_r^*(\boldsymbol{v}_1) & \boldsymbol{w}_r^*(\boldsymbol{v}_2) & \cdots & \boldsymbol{w}_r^*(\boldsymbol{v}_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と定める.

・ w が複数の項からなるとき, 各々の項に対する値の和とする.

計算例 $(r=2)$　“面積を返す”

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{e}_2^*)(\,a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2, c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2\,) &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^*(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{e}_1^*(c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) \\ \boldsymbol{e}_2^*(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{e}_2^*(c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad = \; ad - bc. \end{aligned}$$

多重線形性, 交代性を使って ω を変形しても値は変わらない. 外積代数の定義（多重線形性, 交代性）は, 行列式の性質を反映するため.

定義：r 次微分形式（Differential r-form）
「各点で コベクトルの r 次外積代数 が指定されていること」に対応する概念

表示法　$\omega = \displaystyle\sum_{(i_1, \cdots, i_r) \in I_r} X_{i_1, \cdots, i_r}\; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$　　(各 $X_{i_1, \cdots, i_r}$ は関数)

を r 次微分形式という. r 次微分形式には, 始点の同じ r 個のベクトル列を代入することができる　$\omega(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r)$.　“$r$ 次体積を返す”

定義：微分形式の外微分　(p.145)
スカラー場（関数）$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の外微分は

$$d\varphi \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n$$

であった. これを 0 次の微分形式の外微分とみなし, 高次の微分形式に拡張する.
r 次微分形式

$$\omega = \sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in I_r} X_{i_1,\cdots,i_r}\; dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

に対して, $(r+1)$ 次微分形式 — つまり次数が +1 —

$$d\omega = \sum_{(i_1,\cdots,i_r)\in I_r}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_{i_1,\cdots,i_r}}{\partial x_j}\; dx_j\wedge\right) dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

を対応させる操作 d を **外微分** という.
メモ： $i_1, \cdots, i_r$ の中に j が混じっている項は計算しなくてよい.

計算例 1 $(n=2,\ r=1)$
1 次微分形式 $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$（略して $Pdx+Qdy$）に対して

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Pdx+Qdy) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy \end{aligned}$$

—「グリーンの公式」で見た形.

計算例 2 $(n=3,\ r=1)$
1 次微分形式 $\omega = X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$
（略して $Xdx+Ydy+Zdz$）に対して

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Xdx+Ydy+Zdz) \\ &= \cdots \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\wedge dy \end{aligned}$$

— rot で見た形.

外微分の性質
・ξ が i 次微分形式, η が j 次微分形式 のとき

$$d(\xi\wedge\eta) \;=\; d\xi\wedge\eta + (-1)^i\xi\wedge(d\eta)$$

・ **重要** 外微分を 2 回施すと 消える： $d\circ d = 0$

以下では, 線形空間 V としては内積を指定されたもの（内積空間）を考え, 基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は 正規直交基底 であるとする.

定義： スター作用素（$*$ operator） (p.147)
n 次元線形空間 V に対して $\wedge^p V$ から $\wedge^{n-p}V$ への線形写像

$$* \;:\; \wedge^p V \to \wedge^{n-p}V$$

を, 次のように構成することができる.

- $*(1) = \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n$　・ $*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n) = 1$, および
- $r+s=n$ で $i_1 i_2\cdots i_r\ j_1 j_2\cdots j_s$ が $1\,2\cdots n$ の 偶 (+) 置換／奇 (−) 置換の順列のとき

$$*(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_r}) = \pm\,\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\boldsymbol{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_s}$$

- 1 次結合に関しては線形に拡張する.

例：$n=4$ のとき $\wedge^0 V, \wedge^1 V, \wedge^2 V, \wedge^3 V, \wedge^4 V$ は それぞれ $1, 4, 6, 4, 1$ 次元で,

$$*(1) = \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4. \quad \begin{aligned} &*(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4, && *(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4, \\ &*(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4, && *(\boldsymbol{e}_4) = -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4, && *(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_4, && *(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2, \\ &*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4, && *(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4) = -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3, && *(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_4, && *(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4) = -\boldsymbol{e}_3, \\ &*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_2, && *(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4) = -\boldsymbol{e}_1, \end{aligned} \quad *(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4) = 1.$$

また,

$$\begin{aligned} &*(\alpha_{12}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 + \alpha_{34}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4 + \alpha_{13}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 + \alpha_{24}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4 + \alpha_{14}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_4) \\ &\quad = \alpha_{12}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_4 - \alpha_{34}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 - \alpha_{13}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4 - \alpha_{24}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 + \alpha_{14}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 \\ &\quad = -\alpha_{34}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{14}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 + \alpha_{12}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4 - \alpha_{24}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 - \alpha_{13}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_4 \end{aligned}$$

となる.

性質： $** = (-1)^{p(n-p)}\ :\wedge^p V \to \wedge^p V$

外積空間の内積： $*$ によって V の内積が自然に $\wedge^p V$ の内積を定める.

$$(v, w) \;:=\; *(v\wedge *w) \qquad v, w\in\wedge^p V$$

スター作用素は, 次のように 微分形式に対しても拡張される.
[$n=3$ の場合] まず　$dx \overset{*}{\leftrightarrow} dy\wedge dz,\quad dy \overset{*}{\leftrightarrow} dz\wedge dx,\quad dz \overset{*}{\leftrightarrow} dx\wedge dy$
微分形式に対して, X, Y, Z を関数（$X = X(x,y,z)$ 等）として

$$\begin{aligned} *(Xdx+Ydy+Zdz) &= Xdy\wedge dz + Ydz\wedge dx + Xdx\wedge dy \\ *(Xdy\wedge dz + Ydz\wedge dx + Xdx\wedge dy) &= Xdx + Ydy + Zdz. \end{aligned}$$