

曲線や曲面の向きについて (by 山田)

「方向」と「向き」：ゼロベクトル $\mathbf{0}$ でない (始点の同じ) 2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について, 実数 k ($k \neq 0$) を用いて $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ と表せるとき「 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は同じ方向である」という. そのうちで, $k > 0$ のとき $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は「同じ向き」, $k < 0$ のとき「逆向き」という.

曲線の向き (p.83) :

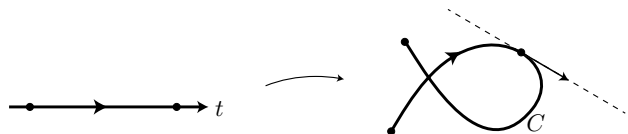
連結な (つながった) 曲線 C の各点 p での接ベクトル $\vec{v}_p$ を

条件 : p を連続的に動かすと $\vec{v}_p$ も連続的に変化する

を満たすように C 全体で指定すること

を「曲線の向き」という. すべての点 p で $\vec{v}_p$ と同じベクトルの向きを指定されれば 曲線の向き も同じとみなす. 向きを指定された曲線を「有向曲線」という. C と図が同じで逆向きの曲線を $-C$ で表す.

数直線は 自然な「正の向きに増加する」向きを持つので, 有向曲線に座標を与えときは, 数直線の向きと曲線の向きが一致するようにとる.



曲面の向き (空間内の曲面の場合) (p.99) :

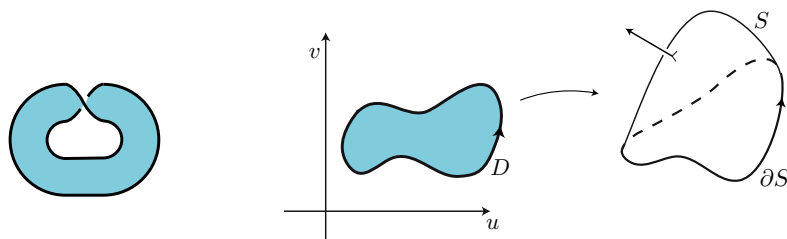
連結な曲面 S の各点 p で法ベクトル $\vec{n}_p$ を

条件 : p を連続的に動かすと $\vec{n}_p$ も連続的に変化する

を満たすように S 全体で指定できるとき, 曲面が「向き付け可能」という.

すべての点 p で $\vec{n}_p$ と同じ向きのベクトルを指定されれば 同じ向き とみなす. その指定を 曲面の「向き」 (あるいは「表」) といい, 向きを指定された曲面を「有向曲面」という. 有向曲面 S の向きを逆にした曲面を $-S$ で表す.

向き付け不可能な曲面として「メビウスの帯」などがある. 有向曲面に座標 $r(u, v)$ を与えるときは, 曲面の向きが 座標の定める法ベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ と一致するようにとる.



境界の記号 ∂ (バウンダリ) : 曲面 S の境界 ∂S . 空間図形 V の境界 ∂V

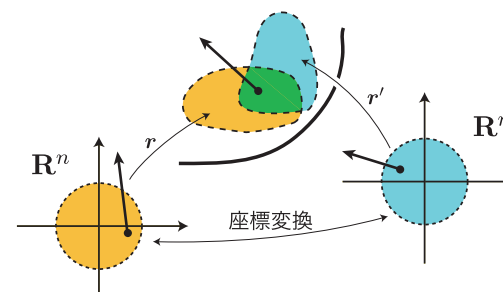
境界の向き : 特に断らない場合は, 次の慣習「境界としての向き」に従う.

- ・閉曲面 S が空間図形 V を囲む ($\partial V = S$) とき, S の向きは, V から外へ向かう法ベクトルで “外が表” と定める.
- ・有向曲面 S が境界 C に囲まれる ($C = \partial S$) とき, 境界 C の向きは, S の表で “外が右” で定める. (p.99)
- ・ $z = f(x, y)$ の形の曲面は, 通常 z -成分が正の法ベクトルで向きを定める.

球面 (球の境界) の下半分 のような場合には注意.

発展 : 一般次元の図形の「向き」

3次元以上の“図形” (正確には「多様体」という) や, $\mathbb{R}^3$ より高次元の $\mathbb{R}^n$ 内の曲面では, 法ベクトルで向きを定めることができないので, 次のように扱う.



・ n 次元の図形 M の, 重なりをもつ2つの座標 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$

$$\mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{r}'(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

が重なった部分で, 座標が 同じ向き か 逆向き かを,

$$\text{座標変換} \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \text{ のヤコビ行列式 } \det \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \neq 0$$

の符号が 正 か 負 かで定める. この行列式が0になる点 (特異点) は, その点で座標が退化すること (同一の点が複数の表示をもつなど. 例: 極座標の $r = 0$) を意味しており, 座標から除外する.

・ M が 重なりをもつ全ての組で同じ向きの座標だけ で覆うことができるとき, M を「向き付け可能」といい, その座標の指定を M の「向き」という. そうでないとき M を「向き付け不可能」という.

・ M の境界 ∂M の向き (M が $n+1$ 次元, ∂M は n 次元とする) : 境界では座標を $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cap \{x_0 \geq 0\}$ にとり “1本目に外 $(-1, 0, 0, \dots, 0)$ を追加したときに M の内部の向きと合う” ように定める.

幾何の用語「有界・開集合／閉集合・領域」 (by 山田)

準備：数学で「無限」に関わる現象を扱うことは難しい．幾何学で，特に積分量を考えるときは“幾何的な広がり”が無限であると問題が生じる．無限 $(+\infty)$ は数ではないことに注意．

閉集合・開集合 は 1 次元の場合の 閉区間・開区間 の拡張概念である．

閉区間 例 $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 境界 $0, 1$ を含む 
開区間 例 $(0, 1) = \{x \mid 0 < x < 1\}$ 境界 $0, 1$ を含まない 

問題点の指摘

例 1： xy -平面で，第 1 象限の面積（定数 1 の積分） $\int_{\text{第 1 象限}} dx dy = +\infty$

例 2：開区間 $(0, 1)$ での $f(x) = \frac{1}{x}$ の積分 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$

例 2 の説明：被積分関数で $f(0)$ は定義されないが， $x = 0$ “左端”は定義域ではないので問題にはならない．しかし，この関数を積分（広義積分）しようとする
と， $x \rightarrow 0$ で $f(x)$ が 限度を超えて発散する $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$ ため，上の積分値は $+\infty$ に発散する．積分値は定まらない．

記号 $B_R(\boldsymbol{p})$ を 半径 R , 中心 $\boldsymbol{p}$ の開球体とする． $B_R(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| < R\}$ ．

定義 1 $\mathbb{R}^N$ で，部分集合 S が**有界**であるとは，次が成り立つこと

じゅうぶん大きな値 R に対して $S \subset B_R(\boldsymbol{o})$

定義 2 $\mathbb{R}^N$ 内で，集合 U が**開集合**であるとは，次が成り立つこと

任意の U の点 $\boldsymbol{x}$ に対して，じゅうぶん小さな値 $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset U$ ．

集合 V が**閉集合**であるとは， V の補集合が開集合であること．

開集合でも閉集合でもない集合も多い． 例： $\{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 \leq y \leq 1\}$ ．

事実 $\mathbb{R}^N$ 内の集合 V が閉集合であることは，次の条件に一致する．

V 内の点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=0}^\infty$ が $\mathbb{R}^N$ 内で $\boldsymbol{x}$ に収束するとき $\boldsymbol{x} \in V$

例： $\mathbb{R}$ 内で $(0, 1)$ は閉集合ではない．

点列 $x_n = 1/n$ を考えると $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin (0, 1)$ ．

定義 3（通常は） $\mathbb{R}^N$ 内で，連結な開集合 を 領域 という．

この講義では簡単のため，領域は常に閉包（極限点，特に境界を追加すること）
して扱い，有界閉領域という用語を用いることにする．

これらの論理は，厳密には「位相」の理論とよばれ，数学全体の基礎分野である．