

ガウスの発散定理 証明の概要 (by 山田)

$\mathbb{R}^3$ の座標変数は通常 xyz であるが, $x_1x_2x_3$ の方が “わかりやすい” あるいは “伝えやすい” ことがある. ここでは, 場合によって読み替えて使うこととする.

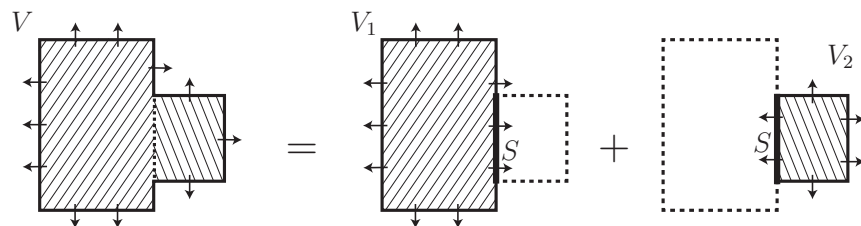
定理 [ガウスの発散定理]

$\mathbb{R}^3$ 内で, V は区分的に滑らかな曲面 (∂V) に囲まれた有界閉領域 とする.

V の境界 ∂V は「境界としての向き」で扱うとする. このとき,

$$\int_V \operatorname{div} \vec{X} dv = \int_{\partial V} \vec{X} \cdot d\vec{S}, \quad \int_V \operatorname{div} \vec{A} dx dy dz = \int_{\partial V} \langle \vec{A}, \vec{n} \rangle dS$$

補題 [領域に関する和公式] 2つの有界閉領域 V_1 と V_2 が, 境界の一部として, 有界な曲面 S を反対側 (表・裏) から共有するとき, V_1 と V_2 を S に沿って接着した領域を $V = V_1 \cup V_2$ とする.



イメージ図 (本来は 空間内の領域)

・空間領域での関数の積分の和公式.

$$\int_V \psi dv = \int_{V_1} \psi dv + \int_{V_2} \psi dv$$

は明らかである. ψ は関数 ($\psi = \operatorname{div} \vec{X}$ を想定). 一方,

・境界に沿う積分の和公式. S が境界の一部でなくなること

$$\partial V = (\partial V_1 - S) \cup (\partial V_2 - S)$$

と “ V_1 の境界としての S の向きと V_2 の境界としての S の向きが逆”

とが対応して, 次が成り立つ.

$$\int_{\partial V} \vec{X} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial V_1} \vec{X} \cdot d\vec{S} + \int_{\partial V_2} \vec{X} \cdot d\vec{S}$$

従って, 発散定理の証明は, 領域 V を分割して行えば良い.

補助定理 ∂V の, V の境界としての向きを指す単位法ベクトル場を $\vec{n}$ とする.

関数 $f = f(x_1, x_2, x_3)$ について

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_3} dv = \int_{\partial V} f dx_1 dx_2 = \int_{\partial V} f \mathbf{e}_3 \cdot \vec{n} dS$$

$i = 3$ の代わりに $i = 1, 2$ の場合も同様.

注1: $\vec{n} dS = \mathbf{n} dS = d\vec{S}$ はベクトル面積素.

注2: $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 \cdot \vec{n} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{n} \rangle = n_3$ ($\vec{n}$ の第3成分).

補助定理の証明: 簡単な場合として, V が柱状の場合について示す.

[柱状の閉領域]

xy 平面内の閉領域 D の柱 のうち,

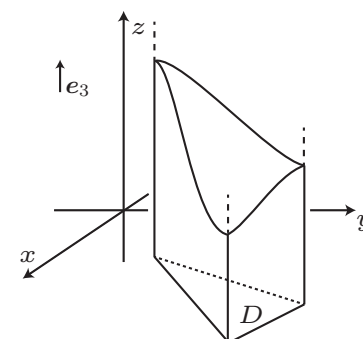
D 上で $\varphi > 0$ をみたす関数 $\varphi = \varphi(x, y)$ を

用いて

下底面: xy 平面 (領域 D) と

上底面: 曲面 $z = \varphi(x, y)$ に

挟まれた領域

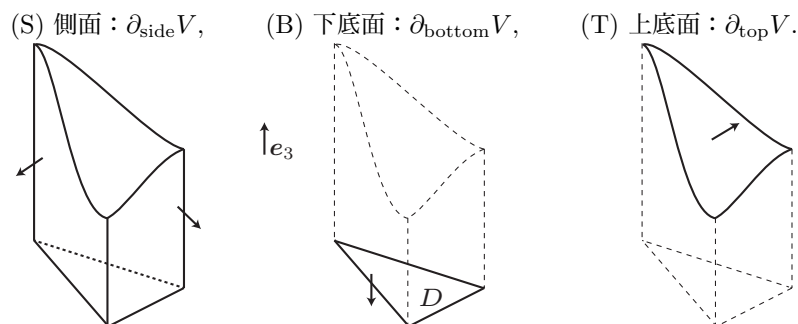


$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \varphi(x, y) \}$$

まず左辺について

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_V \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz \\ &= \iint_D \left(\int_0^{\varphi(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) - f(x, y, 0) dx dy \\ &= \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) dx dy - \iint_D f(x, y, 0) dx dy \end{aligned}$$

次に右辺, ∂V は次の3つの部分から成る: $\partial V = \partial_{\text{side}} V \cup \partial_{\text{bottom}} V \cup \partial_{\text{top}} V$.



(S) 側面 では 法ベクトル ($\vec{n}$ と平行) が $\mathbf{e}_3$ と垂直. $\mathbf{e}_3 \cdot \vec{n} = 0$.

(B) 下底面 は xy 平面 ($z = 0$) 内の D

境界としての向き の単位法ベクトルは $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, また $dS = dxdy$.

よって

$$\mathbf{e}_3 \cdot \vec{n} dS = -dxdy$$

(T) 上底面 は $z = \varphi(x, y)$ ($(x, y) \in D$)

境界としての向き の法ベクトルとして $\begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}$.

これと同じ向きの単位法ベクトルは $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}$

また 面積素は $dS = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1} dxdy$.

$$\mathbf{e}_3 \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}} \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1} dxdy = dxdy$$

以上から

—— $\vec{n} dS$ は意外と簡単!

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_{\partial V} f dxdy \\ &= \int_{\text{側面}} f dxdy + \int_{\text{下底面}} f dxdy + \int_{\text{上底面}} f dxdy \\ &= 0 - \iint_D f(x, y, 0) dxdy + \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) dxdy \end{aligned}$$

左辺と右辺が等しいことが示された.

□

発散定理の証明: ベクトル場 $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ の各成分 X_i について, 補助定理で

$$f = X_1 \text{ で } i = 1 \text{ とすると } \int_V \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dv = \int_{\partial V} X_1 \mathbf{e}_1 \cdot \vec{n} dS$$

$$f = X_2 \text{ で } i = 2 \text{ とすると } \int_V \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dv = \int_{\partial V} X_2 \mathbf{e}_2 \cdot \vec{n} dS$$

$$f = X_3 \text{ で } i = 3 \text{ とすると } \int_V \frac{\partial X_3}{\partial x_3} dv = \int_{\partial V} X_3 \mathbf{e}_3 \cdot \vec{n} dS$$

$\text{div } \vec{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}$ であり, $\vec{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3$ である.

この3式の和をとれば 発散定理が得られる.

□

ストークスの定理 証明の概要 (by 山田)

定理 [ストークスの定理]

$\mathbb{R}^3$ 内で, S は 区分的に滑らかな閉曲線 (∂S) に囲まれた, 向き付けられた曲面 とする. S の境界 ∂S は「境界としての向き」で扱うとする. このとき,

$$\int_S \text{rot } \vec{X} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{X} \cdot d\vec{r}, \quad \int_S \langle \text{rot } \vec{X}, \vec{n} \rangle dS = \int_{\partial S} \langle \vec{X}, \vec{t} \rangle dC$$

補助定理 曲面 S の単位法ベクトルを $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ とする.

関数 $f = f(x_1, x_2, x_3)$ について

$$\int_S \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} n_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2} n_3 \right) dS = \int_{\partial S} f dx_1$$

左辺は 次のものに等しい

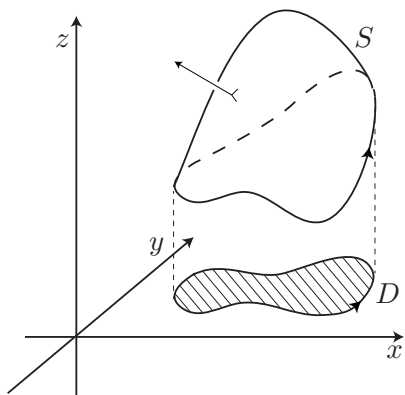
$$\int_S \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_2 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_3, \vec{n} \right\rangle dS$$

$(i, j, k) = (1, 2, 3)$ を巡回したものも成立.

補助定理の証明：簡単な場合として, S がグラフ型の曲面

$$S = \{ z = \varphi(x, y) \mid (x, y) \in D \} \quad (D \text{ は閉領域})$$

の場合について示す.



S の座標: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \varphi(x, y)); (x, y) \in D$.

$$S \text{ の法ベクトル } \vec{N} = \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{同じ向きの単位法ベクトルは } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

以下, 何度も登場するので $\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}$ を $\sqrt{\quad}$ と略記する. $\vec{n}$ の成分は

$$n_1 = \frac{-\varphi_x}{\sqrt{\quad}}, \quad n_2 = \frac{-\varphi_y}{\sqrt{\quad}}, \quad n_3 = \frac{1}{\sqrt{\quad}}$$

面積素は $dS = \sqrt{\quad} dx dy$. また $n_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{n}$, $n_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{n}$ なので

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{-\varphi_y}{\sqrt{\quad}} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{\quad}} \right) \sqrt{\quad} dx dy \\ &= - \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial z} \varphi_y + \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

ここで, 次の D 上 の関数 F を考える (f は $\mathbb{R}^3$ の関数だった).

$$F(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$$

すると, 合成関数の微分公式から $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= - \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \\ &= - \iint_D \frac{\partial F}{\partial y} dx dy \\ &= \int_{\partial D} F dx \quad \text{グリーンの定理 による} \\ &= \int_{\partial S} f dx \end{aligned}$$

最後の等式では,

$$\partial D \text{ の座標: } (x(t), y(t)) \quad \text{と} \quad \partial S \text{ の座標: } (x(t), y(t), \varphi(x(t), y(t)))$$

の対応の下, ∂D に沿う F の積分 が ∂S に沿う f の積分 に等しいことによる. $\square$

【グリーンの定理】平面内の、区分的に滑らかな閉曲線に囲まれた閉領域 D に関して

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

ストークスの定理の証明： ベクトル場 $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ の各成分 X_i について、

補助定理で $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ を巡回する.

$$f = X_1 \text{ として } \int_S \left\langle \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \mathbf{e}_3, \vec{n} \right\rangle dS = \int_{\partial S} X_1 dx_1$$

$$f = X_2 \text{ として } \int_S \left\langle \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \mathbf{e}_3 - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_1, \vec{n} \right\rangle dS = \int_{\partial S} X_2 dx_2$$

$$f = X_3 \text{ として } \int_S \left\langle \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \mathbf{e}_2, \vec{n} \right\rangle dS = \int_{\partial S} X_3 dx_3$$

この3式を辺々足す.

左辺は

$$\int_S \left[\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \right] \cdot \vec{n} dS$$

$$\text{これは } \int_S \text{rot } \vec{X} \cdot \vec{n} dS = \int_S \text{rot } \vec{X} \cdot d\vec{S} \text{ である.}$$

$$\text{右辺の3式の和は } \int_{\partial S} X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$$

曲線 ∂S の座標 $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ を使うとき

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} dt, \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t} dt, \quad dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial t} dt,$$

と変数変換することから,

$$\text{これは 線積分 } \int_{\partial S} \vec{X} \cdot d\vec{r} \text{ である.}$$

□