ベクトル解析 の記号 (by 山田)

ベクトル解析 について, 教科書「曲面とベクトル解析」(小林真平 著, 日本評論社) の記号と, よく使われる記号を整理します. どれで書いてもわかるようにしてください.

$\boxed{0}$ ベクトル場の記号は 教科書では $\boldsymbol{v}$ だが

山田の授業では $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{X}$ などを用いる.　(ベクトルは $\overrightarrow{a}$ など)

ベクトル解析で 注意すべきことの 1 つは, ベクトル (ベクトル場) と スカラー (スカラー場 = 関数) を 区別すること である.

- 平面 $(\mathbb{R}^2)$ の座標には xy-座標, 空間 $(\mathbb{R}^3)$ の座標に xyz-座標がよく用いられるが, (x_1, x_2) や (x_1, x_2, x_3) を用いる (その方が便利な) こともある.
- 座標は横, ベクトルは縦, に書くのが通常であるが, 絶対ではない. 特に, 点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ ($\overrightarrow{\mathrm{OP}}$) と見なして縦に表示することが 結構ある.
- 「A_x」は「ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ の x 成分」(A_1) であることが多い. 「関数 $A(x, y, z)$ の x による偏微分 $\frac{\partial A}{\partial x}$」には使わないことにする.　文脈で 理解しないと学べない.

$\boxed{1}$ 線形空間 $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を, それぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ と表すことがある.

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{例：} 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

ベクトル場としての $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を, それぞれ $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ と表す. (参照$\boxed{3}$)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X} &= (x^2 + 2y)\boldsymbol{i} - xz\,\boldsymbol{j} + xyz\,\boldsymbol{k} \\ &= (x^2 + 2y)\frac{\partial}{\partial x} - xz\frac{\partial}{\partial y} + xyz\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{とは} \quad \overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} x^2 + 2y \\ -xz \\ xyz \end{bmatrix} \quad \text{のこと.}$$

始点の指定 at ：上の $\overrightarrow{X}$ に対して $\overrightarrow{X}_{\mathrm{at}(2,-3,4)} = \begin{bmatrix} 2^2 + (-3)\cdot 3 \\ -2 \cdot 4 \\ 2 \cdot -3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -24 \end{bmatrix}_{\mathrm{at}(-2,3,4)}$.

$\boxed{2}$ **ベクトル解析 の主役** (4 章)

$$\begin{array}{llll} \textbf{勾配}\ (\text{gradient}) & \nabla\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi & (\text{スカラー場 から ベクトル場}) \\ \textbf{発散}\ (\text{divergence}) & \mathrm{div}\,\overrightarrow{X} = \nabla \cdot \overrightarrow{X} & (\text{ベクトル場 から スカラー場}) \\ \textbf{回転}\ (\text{rotation}) & \mathrm{rot}\,\overrightarrow{X} = \nabla \times \overrightarrow{X} & (\text{ベクトル場 から ベクトル場}) \end{array} , \ \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

∇ を使って書くと覚えやすい. ($\cdot$ は内積 で $\times$ は外積)

勾配と発散は本質的に一般次元 $\mathbb{R}^n$ の演算. rot は (もともと) 3 次元に特有 の演算であるが, 教科書では グリーンの公式に現れる “微分” を 2 次元の rot と解釈している.

勾配　$\mathbb{R}^n$ で, スカラー場 (関数) $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して, ベクトル場

$$\nabla\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

発散　$\mathbb{R}^n$ で, ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ に対して, スカラー場　(各 A_i は関数 $A_i = A_i(x_1, \ldots, x_n)$)

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \mathrm{div} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \nabla \cdot \overrightarrow{A}$$

回転　$\underline{\mathbb{R}^3 \text{ で}}$, ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ に対して, ベクトル場　(各 A_i は関数 $A_i = A_i(x_1, x_2, x_3)$)

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A} = \mathrm{rot} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

$\boxed{3}$ **ベクトルによる方向微分**

幾何学では, ベクトルの始点も重要. ベクトルの表記には 成分と始点を表示する.

$$\overrightarrow{a}_{\mathrm{at}\ P} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{\mathrm{at}\ (p_1, p_2)} = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_{\mathrm{at}\ (p_1, p_2)} \qquad \text{例：} \overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{at}\ (-2,3)}$$

ベクトルは関数を「始点 P で, $\overrightarrow{a}$ 方向に」方向微分する.　例えば

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{at}\ (-2,3)} = \left(4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)_{\mathrm{at}\ (-2,3)}, \quad f = f(x, y) = x^2 y$$

のとき

$$\overrightarrow{a}(f) = \left(4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)_{\mathrm{at}\ (-2,3)} (x^2 y) = \big(4(2xy) - (x^2) \big)_{\mathrm{at}\ (-2,3)} = -52.$$

$T_P\mathbb{R}^n = \{\mathbb{R}^n$ の, 始点 P のベクトル$\}$ は n 次元の線形空間で, 基底として

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\mathrm{at}\ P} = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}_{\mathrm{at}\ P} &= \{\boldsymbol{e}_{1\ \mathrm{at}\ P}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n\ \mathrm{at}\ P}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{at}\ P}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{at}\ P} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}_{\mathrm{at}\ P}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}_{\mathrm{at}\ P} \right\}. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ **曲線**（２章）　$C: \boldsymbol{p}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)\quad (a \le t \le b)$

速度ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix}$ を経て，

・線素 $\left\|\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right\| dt$　$\left(C \text{ の長さ} = \displaystyle\int_a^b \left\|\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right\| dt\right)$

・ベクトル線素 $\boldsymbol{t}\, dC = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt$

（$\boldsymbol{t}$ は単位接ベクトル）

注意：ベクトル線素は $\boldsymbol{t}\, dC$ の他に $d\boldsymbol{p}$ あるいは $\overrightarrow{dp}$ と表すことがある．

曲面（３章）　$S: \boldsymbol{p}(u,v) = \big(x_1(u,v),\ x_2(u,v),\ x_3(u,v)\big)\quad (u,v) \in D\ (D: u, v \text{ の領域})$

法ベクトル $\overrightarrow{N} = \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} \end{bmatrix}$,

単位法ベクトル $\overrightarrow{n}(= \boldsymbol{n}) = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{N}\|}\overrightarrow{N}$　を経て，　$\left(S \text{ の面積} = \displaystyle\iint_D \|\overrightarrow{N}\| du dv\right)$

・面積素 $dS = \|\overrightarrow{N}\| du dv$　・ベクトル面積素 $\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{N} du dv$.

注意：ベクトル面積素の表記は $\overrightarrow{dS}$ の他に $\boldsymbol{n}\, dS$ あるいは $d\boldsymbol{S}$ など，人それぞれ．

$\boxed{5}$ **線積分**　ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ の 曲線 $C: \boldsymbol{r}(t)\ (a \le t \le b)$ に沿う線積分（p.86）

記号はいろいろある：教科書は $\displaystyle\int_C \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}\rangle dC$.　他に $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$, $\displaystyle\int_C \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dr}$ など

意味としては「$\overrightarrow{A}_{\text{at } \boldsymbol{r}(t)}$ とベクトル線素 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$ の内積」の積分

$$\int_C \langle \overrightarrow{A}, \boldsymbol{t}\rangle dC = \int_C \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_a^b \left(A_1 \frac{dx_1}{dt} + A_2\frac{dx_2}{dt} + A_3\frac{dx_3}{dt}\right) dt$$

—— 各関数 $A_i = A_i(x_1, x_2, x_3)$ は $A_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ に置き換える.

面積分　ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ の 曲面 $S: \boldsymbol{r}(u,v)\ ((u,v) \in D)$ に沿う面積分（p.92）

記号はいろいろある：教科書は $\displaystyle\int_S \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle dS$.　他に $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$, $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS}$ など

$$\int_S \langle \overrightarrow{A}, \boldsymbol{n}\rangle dS = \int_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_D \overrightarrow{A}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) du\, dv$$

$\boldsymbol{n}$ は 曲面 S の単位法ベクトル場, dS は面積素, $\overrightarrow{dS}$ はベクトル面積素（$\overrightarrow{dS} = d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\, dS$）である．$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ は「$\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向成分」（スカラー）で，$A_{\boldsymbol{n}}$ とか A_n と表す場合もある．

ベクトル場 $\overrightarrow{A}$ と同等な１次微分形式 $\widetilde{A}$ を使えば，　線積分は $\displaystyle\int_C \widetilde{A}$,　面積分は $\displaystyle\int_S *\widetilde{A}$.

空間での積分　教科書では，体積要素として $dx\, dy\, dz$ を用いている (p.105)．dV, dv や $d\, vol$ と書くこともある．

今までのことから，例えば「ガウスの発散定理」の表現もいろいろある．教科書では（p.105）

$$\int_V \operatorname{div}\overrightarrow{A}\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial V} \langle \overrightarrow{A}, \boldsymbol{n}\rangle dS$$

他に　$\displaystyle\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\, dv = \int_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$,　$\displaystyle\int_V \operatorname{div}\overrightarrow{A}\, dV = \int_{\partial V} \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS}$　など

$\boxed{5}$ **同等**　ベクトル場 $\overrightarrow{X}$ から１次微分形式 $\widetilde{X}$（あるいは X^*）とその逆

$$\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad X^* = \widetilde{X} = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3$$

発想：ユークリッド内積（始点の同じベクトル２つに対して値を返す）の「一方に $\overrightarrow{X}$ を代入して待機 $\langle \overrightarrow{X}, \_\rangle$」することで，１次微分形式が得られる．ベクトル $\overrightarrow{a}_{\text{at } P}$ を代入すると

$$\text{内積の値}\quad \langle \overrightarrow{X}_{\text{at } P}, \overrightarrow{a}_{\text{at } P}\rangle = \langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{a}\rangle_{\text{at } P}$$

を返す．その値は「$\widetilde{X}$ に $\overrightarrow{a}_{\text{at } P}$ を代入した値：$\widetilde{X}(\overrightarrow{a}_{\text{at } P})$」に一致する．

ベクトル解析から微分形式への発展：**外微分** d と**スター作用素** $*$ を組み合わせる

同等（p.150）

$\nabla\varphi = (d\varphi)^*$,

$\operatorname{div}\overrightarrow{X} = *d*\widetilde{X} = *d*(X^*)$,　$\operatorname{rot}\overrightarrow{X} = (*d\widetilde{X})^* = (*d(X^*))^*$.

$\nabla^2\varphi = *d*d\varphi$,　$\nabla^2\overrightarrow{X} = -*d*d\widetilde{X} + d*d*\widetilde{X}$.

演算の組み合せに関する２つの公式が $d\circ d = 0$（$d^2 = 0$, p.146）と対応する．

(p.78)　$\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = \overrightarrow{0} \ \leftrightarrow\ dd\varphi = 0$,　$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overrightarrow{X}) = 0 \ \leftrightarrow\ dd\widetilde{X} = 0$,

外微分の列：N 次元領域 D 上で, $\Omega^p = \{D \text{ 上の } p \text{ 次微分形式}\}$ とするとき，

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^p \xrightarrow{d} \Omega^{p+1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{N+1} = \{0\}$$

スター作用素 $*: \Omega^p \longrightarrow \Omega^{N-p}$ について，$** = (-1)^{p(N-p)}: \Omega^p \longrightarrow \Omega^p$　(p.149)

$\boxed{6}$ **一般化したストークスの定理** (p.172)

平面の「グリーンの定理」, 空間の「ガウスの発散定理」, 空間の「ストークスの定理」いずれも，１つの公式に統一される．

定理　一般次元の $\mathbb{R}^N$ 内で, 境界 (∂M) をもつ有向な r 次元多様体 M と $r-1$ 次微分形式 ω に対して

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

「r 次元多様体」（曲面 $(r=2)$ の一般化）任意の点で局所的に $\mathbb{R}^r$ と同相 という性質をもつ図形．