

2つの演算の組み合わせ $\text{rot} \cdot \nabla$ と $\text{div} \cdot \text{rot}$ (by 山田)

定理1 (p.78) : $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されるスカラー場, ベクトル場について

$$(1) \text{rot}(\nabla\varphi) = 0.$$

$$(1') \text{rot } \vec{X} = \vec{0} \text{ ならば } \exists \varphi \text{ が存在して } \vec{X} = \nabla\varphi.$$

ただし この φ (の逆算) には定数の自由度がある.

$$\text{微分形式を用いると } (1) d\varphi = 0. \quad (1') d\vec{X} = 0 \text{ ならば } \vec{X} = d\varphi. \quad (\text{p.146,154})$$

$$\cdot \vec{X} \text{ (rot } \vec{X} = \vec{0}) \text{ から } \varphi \text{ の構成法: } \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \text{ (各 } X_i \text{ は関数) に対して}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_a^x X_1(s, b, c) ds + \int_b^y X_2(x, t, c) dt + \int_c^z X_3(x, y, u) du \\ &= \int_L \vec{X} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

ただし (a, b, c) は任意の点. 通常は $O(0, 0, 0)$ をとる.

L は $O(0, 0, 0)$, $A(x, 0, 0)$, $B(x, y, 0)$, $P(x, y, z)$ をたどる折れ線 $OA + AB + BP$.

証明: $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = X_3$ は容易. $\text{rot } \vec{X} = \vec{0}$ から $\frac{\partial X_3}{\partial y} = \frac{\partial X_2}{\partial z}$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= X_2(x, y, c) + \frac{\partial}{\partial y} \int_c^z X_3(x, y, u) du \\ &= X_2(x, y, c) + \int_c^z \frac{\partial X_3}{\partial y}(x, y, u) du \\ &= X_2(x, y, c) + \int_c^z \frac{\partial X_2}{\partial z}(x, y, u) du \\ &= X_2(x, y, c) + X_2(x, y, z) - X_2(x, y, c) = X_2(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = X_1 \text{ も同様.}$$

□

例1. $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x & +3z \\ 3y+4z \end{pmatrix}$ (rot $\vec{X} = \vec{0}$ を確認せよ) の場合

$$\varphi = \int_0^x 2s ds + \int_0^y 2x dt + \int_0^z 3y + 4u du = x^2 + 2xy + 3yz + 2z^2 (+C)$$

定理2 (p.78) : $\mathbb{R}^3$ 全体で定義されるスカラー場, ベクトル場について

$$(2) \text{div}(\text{rot } \vec{X}) = 0.$$

$$(2') \text{div } \vec{B} = 0 \text{ ならば } \exists \vec{X} \text{ が存在して } \vec{B} = \text{rot } \vec{X}.$$

ただし この $\vec{X}$ (の逆算) には $\nabla\varphi$ 型の自由度がある.

$$\text{rot}(\vec{X} + \nabla\varphi) = \text{rot } \vec{X} + \text{rot}(\nabla\varphi) = \text{rot } \vec{X} + \vec{0} = \text{rot } \vec{X}$$

微分形式を用いると (p.146,154)

$$(2) d\vec{X} = 0. \quad (2') d\mu_B = 0 \text{ ならば } \mu_B = d\vec{X} \text{ (ただし } \mu_B = *\tilde{B} \text{ 2次形式)}$$

$$\vec{B} \text{ (div } \vec{B} = 0) \text{ から } \vec{X} \text{ の構成法 (1)} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \text{ と表すとして (p.116)}$$

各 B_i, X_i が $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ の関数であることに注意して

$$X_1(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 s(x_3 B_2(s\mathbf{x}) - x_2 B_3(s\mathbf{x})) ds$$

$$X_2(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 s(x_1 B_3(s\mathbf{x}) - x_3 B_1(s\mathbf{x})) ds$$

$$X_3(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 s(x_2 B_1(s\mathbf{x}) - x_1 B_2(s\mathbf{x})) ds$$

証明: $\text{div } \vec{B} = 0$ から $\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} &= \int_0^1 s^2 \left(x_2 \frac{\partial B_1}{\partial x_2}(s\mathbf{x}) - x_1 \frac{\partial B_2}{\partial x_2}(s\mathbf{x}) - x_1 \frac{\partial B_3}{\partial x_3}(s\mathbf{x}) + x_3 \frac{\partial B_1}{\partial x_3}(s\mathbf{x}) \right) \\ &\quad + 2s B_1(s\mathbf{x}) ds \\ &= \int_0^1 s^2 \left(x_2 \frac{\partial B_1}{\partial x_2}(s\mathbf{x}) + x_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_1}(s\mathbf{x}) + x_3 \frac{\partial B_1}{\partial x_3}(s\mathbf{x}) \right) + 2s B_1(s\mathbf{x}) ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (s^2 B_1(s\mathbf{x})) ds = B_1(x, y, z) \end{aligned}$$

他の成分も同様. □

例2-1. $\vec{B} = \begin{pmatrix} x+6y \\ y-3z \\ 12x & -2z \end{pmatrix}$ の場合, $\vec{X} = \begin{pmatrix} -4xy + yz - z^2 \\ 4x^2 - xz - 2yz \\ 2y^2 + xz \end{pmatrix}$ を得る.

$$X_1 = \int_0^1 s(zs(y-3z) - ys(12x-2z)) ds = -4xy + yz - z^2$$

$$X_2 = \int_0^1 s(xs(12x-2z) - zs(x+6y)) ds = 4x^2 - xz - 2yz$$

$$X_3 = \int_0^1 s(ys(x+6y) - xs(y-3z)) ds = 2y^2 + xz$$

$$\boxed{\vec{B} \text{ (div } \vec{B} = 0) \text{ から } \vec{X} \text{ の構成法 (2)}} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \text{ と表すとして}$$

$$X_1(x, y, z) = 0, \quad X_2(x, y, z) = \int_a^x B_3(s, y, z) ds,$$

$$X_3(x, y, z) = - \int_a^x B_2(s, y, z) ds + \int_b^y B_1(a, t, z) dt$$

ただし $(a, b, 0)$ は任意の点. 通常は $O(0, 0, 0)$ をとる.

証明： $\text{div } \vec{B} = 0$ から $\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0$ が成り立つので

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z} &= - \int_a^x \frac{\partial B_2}{\partial y}(s, y, z) ds + B_1(a, y, z) - \int_a^x \frac{\partial B_3}{\partial z}(s, y, z) ds \\ &= \int_a^x \frac{\partial B_1}{\partial x}(s, y, z) ds + B_1(a, y, z) \\ &= B_1(x, y, z) - B_1(a, y, z) + B_1(a, y, z) = B_1(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x} = B_2, \quad \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} = B_3 \quad \text{の確認はもっと簡単.} \quad \square$$

例 2-2. $\vec{B} = \begin{pmatrix} x+6y \\ y-3z \\ 12x \quad -2z \end{pmatrix}$ ($\text{div } \vec{B} = 0$ を確認せよ) の場合

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, \quad X_2 = \int_0^x 12s - 2z ds = 6x^2 - 2xz \\ X_3 &= - \int_0^x (y-3z) ds + \int_0^y 6t dt = -xy + 3xz + 3y^2, \end{aligned} \quad \vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 6x^2 - 2xz \\ -xy + 3xz + 3y^2 \end{pmatrix}$$

例 2-1 と例 2-2 の比較. 与えられた $\vec{B}$ ($\text{div } \vec{B} = 0$) に対して, $\vec{B} = \text{rot } \vec{X}$ となる $\vec{X}$ の逆算には $\nabla\varphi$ 型の自由度がある.

$$f = 2x^2y - xyz + xz^2 + y^2z \text{ とおくと } \nabla f = \begin{pmatrix} 4xy - yz + z^2 \\ 2x^2 - xz + 2yz \\ -xy + y^2 + 2xz \end{pmatrix} \text{ となり,}$$

$$\vec{X} = \vec{X}' - \nabla f = \begin{pmatrix} -4xy + yz - z^2 \\ 4x^2 - xz - 2yz \\ 2y^2 + xz \end{pmatrix} \text{ を得る. } \text{rot } \vec{X}' = \text{rot } \vec{X} = \vec{B} \text{ となる.}$$

さて, 定理 (1) と (2) を合わせると

$$\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^3 \text{ 上のスカラー場 (関数)}\}, \quad \mathcal{X} = \{\mathbb{R}^3 \text{ 上のベクトル場}\}$$

として

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\text{const}} \mathcal{C} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{X} \xrightarrow{\text{rot}} \mathcal{X} \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{C} \longrightarrow \{0\}$$

(1)(2) 2つ進むと消える.

微分形式に移ると, $\Omega^p = \{\mathbb{R}^3 \text{ 上の } p \text{ 次微分形式}\}$ として

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\text{const}} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \Omega^3 \longrightarrow \{0\}$$

$$\boxed{d \circ d = 0}$$

なお, $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{const}} \Omega^0$ は「定数関数」への対応.

これは一般次元で成り立つ.

N 次元領域 D ($\subset \mathbb{R}^N$) 上で, $\Omega^p = \{D \text{ 上の } p \text{ 次微分形式}\}$ とするとき,

$$\begin{aligned} \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\text{const}} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots \\ \dots \xrightarrow{d} \Omega^p \xrightarrow{d} \Omega^{p+1} \xrightarrow{d} \dots \\ \dots \xrightarrow{d} \Omega^{N+1} = \{0\} \end{aligned}$$

しかし (1')(2') 「 $d\mu = 0$ ならば $\mu = d\omega$ 」については, 一般の領域 D では成り立たない. 星形領域 (p.113) で成立する. 実は, D の位相幾何学 (トポロジー) 的な分析に貢献する ($\rightarrow$ ホモロジーの理論) .