

解答例

1 解答例：1 次従属，非自明な 1 次関係式として

$$2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad 5\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{0},$$

および その 2 式の 1 次結合

$$(2s - 5t)\mathbf{a}_1 - (s - 3t)\mathbf{a}_2 + s\mathbf{a}_3 + t\mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

ただし $s = t = 0$ の場合は除く。(自明な 1 次関係式になるため)

考え方 「 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次独立である」とは，

$$\text{「}\mathbb{R}x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\text{」}$$

が成り立つ」こと。

だから，

$$x_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ -8 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ -11 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ -12 \\ 5 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ -7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の非自明な解 ($x_1 = x_2 = \dots = 0$ 以外の解) を探せば良い.

- ・解が存在しないなら 1 次独立. (rank や 行列式で，そのことを説明する.)
- ・解が存在する なら 1 次従属.

その際，非自明な解を係数にした 1 次関係式が「非自明な 1 次関係式」.

上の方程式は 左下の同次型連立方程式であり，行列を用いて表せば右下

$$\begin{cases} 7x_1 & 9x_2 & -5x_3 & +8x_4 & = 0 \\ 17x_1 & 22x_2 & -12x_3 & +19x_4 & = 0 \\ -8x_1 & -11x_2 & +5x_3 & -7x_4 & = 0 \\ 11x_1 & 14x_2 & -8x_3 & +13x_4 & = 0 \\ 4x_1 & +5x_2 & -3x_3 & +5x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 9 & -5 & 8 \\ 17 & 22 & -12 & 19 \\ -8 & -11 & 5 & -7 \\ 11 & 14 & -8 & 13 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である. 行変形などで解けば良い.

この問題の場合，4 つのベクトルを並べてできる行列の rank が 2. □

[計算] 行変形

初手は (1)→(1)+(3), (2)→(2)+2(3), (3)→(3)+2(5) とした.

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & -5 & 8 \\ 17 & 22 & -12 & 19 \\ -8 & -11 & 5 & -7 \\ 11 & 14 & -8 & 13 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 11 & 14 & -8 & 13 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 11 & 14 & -8 & 13 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 14 & -42 \\ 0 & 5 & 5 & -15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 & -2x_3 & +5x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & -3x_4 & = 0 \end{cases}.$$

$$\text{解は } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

□

2 解答例：

$$\begin{cases} p = & s & -t \\ q = & 3s & -4t \\ r = & -4s & +9t \end{cases}.$$

考え方：連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ に解が存在する条件は，係数行列 A と拡大係数行列 ($A \ \mathbf{b}$) の rank が等しいこと

$$\text{rank } A = \text{rank } (A \ \mathbf{b})$$

さらに，解が存在するとき

$$\text{解の自由度} = \text{未知数の個数} - \text{rank } A$$

[計算] 行変形

$$\begin{bmatrix} 7 & 9 & -5 & 8 & p \\ 17 & 22 & -12 & 19 & q \\ -8 & -11 & 5 & -7 & r \\ 11 & 14 & -8 & 13 & s \\ 4 & 5 & -3 & 5 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & p-2t \\ 1 & 0 & -2 & 5 & q+2r \\ 0 & -1 & -1 & 3 & r+2t \\ 11 & 14 & -8 & 13 & s \\ 4 & 5 & -3 & 5 & t \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 & q+2r \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -r-2t \\ -1 & -1 & 1 & -2 & p-2t \\ 11 & 14 & -8 & 13 & s \\ 4 & 5 & -3 & 5 & t \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 & q+2r \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -r-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-2t+q+2r-(r+2t) \\ 0 & 14 & 14 & -42 & s-11(q+2r) \\ 0 & 5 & 5 & -15 & t-4(q+2r) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 & q+2r \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -r-2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} &= p - 2t + q + 2r - r - 2t = p + q + r - 4t, \\ \text{(b)} &= s - 11(q + 2r) + 14(r + 2t) = -11q - 8r + s + 28t, \\ \text{(c)} &= t - 4(q + 2r) + 5(r + 2t) = -4q - 3r + 11t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \text{(a)} \\ \text{(b)} \\ \text{(c)} \end{matrix} \text{の係数行列} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -11 & -8 & 1 & 28 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 11 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -9 \end{bmatrix}. \quad \begin{cases} p = & s & -t \\ q = & 3s & -4t \\ r = & -4s & +9t \end{cases}. \quad \square \end{aligned}$$

3 列空間 型の表示を, 解空間 型の表示に変えることに意義がある.

解答例:

$$\begin{cases} p = & s & -t \\ q = & 3s & -4t \\ r = & -4s & +9t \end{cases}, \quad \text{別解} \begin{cases} r = & 11p & -5q \\ s = & 4p & -q \\ t = & 3p & -q \end{cases}.$$

考え方 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ とは「 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の生成する空間」

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle = \{ \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 + \lambda_4 \mathbf{a}_4 \mid \text{各 } \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

よって, $\mathbf{v}$ がこれに属すること $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ は

$$\text{未知数 } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ の方程式 } x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 = \mathbf{v} \\ \text{に解が存在すること}$$

と同値で, これを成分で書くと2と同一の連立方程式となる. 同じ結論となる. $\square$

3 (別解)

考え方 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ を列変形で簡単にしてから考える.

$$\begin{aligned} \text{列変形 } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) &= \begin{bmatrix} 7 & 9 & -5 & 8 \\ 17 & 22 & -12 & 19 \\ -8 & -11 & 5 & -7 \\ 11 & 14 & -8 & 13 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 9 & -5 & 1 \\ 17 & 22 & -12 & 2 \\ -8 & -11 & 5 & 1 \\ 11 & 14 & -8 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & -15 & -20 & 10 \\ 2 & -3 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\mathbf{v}$ がこの空間に属す条件を求める.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 11 & -5 & r \\ 4 & -1 & s \\ 3 & -1 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & r - 11p + 5q \\ 0 & 0 & s - 4p + q \\ 0 & 0 & t - 3p + q \end{bmatrix}. \quad \begin{cases} r = & 11p & -5q \\ s = & 4p & -q \\ t = & 3p & -q \end{cases}.$$

4 解答例:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意}). \quad \text{別解} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

考え方 3で得られる p, q, r, s, t の条件は, すでに整理された連立方程式になっているはず. その解を表示すれば良い.

$$\begin{cases} p = & s & -t \\ q = & 3s & -4t \\ r = & -4s & +9t \end{cases}, \quad \text{別解} \begin{cases} r = & 11p & -5q \\ s = & 4p & -q \\ t = & 3p & -q \end{cases}.$$

考察 4で得られたこと (解答と別解) は, 次のように捉えられる.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} 7x_1 & 9x_2 & -5x_3 & +8x_4 & = p \\ 17x_1 & 22x_2 & -12x_3 & +19x_4 & = q \\ -8x_1 & -11x_2 & +5x_3 & -7x_4 & = r \\ 11x_1 & 14x_2 & -8x_3 & +13x_4 & = s \\ 4x_1 & +5x_2 & -3x_3 & +5x_4 & = t \end{cases} \text{に解が存在} \right\} \\ Z_2 &= \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ -8 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 22 \\ -11 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -12 \\ 5 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \\ -7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

は同一の線形空間である: $Z_1 = Z_2$. あらためて Z とする. 次元は 2: $\dim Z = 2$.

[補足] (線形第2) Z の基底として

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \text{あるいは} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B}$ への基底変換行列 P , およびその逆変換, 基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{A}$ への基底変換行列 Q は

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(P は下2成分から, Q は上2成分から “読み取る” ことができる)

もちろん「逆変換の行列は逆行列」である: $Q = P^{-1}$.

以上