

空間内の正射影
練習問題 (by 山田)

問 1 xyz 空間において, 原点 O を通る直線 ℓ , 点 A を次の通りとする.

$$\ell : \frac{x}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-8}, \quad \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 81 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

- (1) 点 $A(0, 81, 0)$ から直線 ℓ に下ろした垂線の足 H_A の座標を求めよ.
- (2) 一般の点 $X(a, b, c)$ から直線 ℓ に下ろした垂線の足を H とすると, ある行列 P を用いて $\overrightarrow{OH} = P \overrightarrow{OX}$ と表せる. この行列 P を求めよ. 必要なら, 点の座標には点 $X(a, b, c), H(a', b', c')$ を用いること.
- (3) 行列 P の階数 $\text{rank } P$ を求めよ.

問 2 xyz 空間において, 原点 O を含む平面 π , 点 A を次の通りとする.

$$\pi : 2x + 3y - z = 0, \quad \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

- (1) 点 $A(0, 0, 7)$ から平面 π に下ろした垂線の足 H_A の座標を求めよ.
- (2) 一般の点 $X(a, b, c)$ から平面 π に下ろした垂線の足を H とすると, ある行列 P を用いて $\overrightarrow{OH} = Q \overrightarrow{OX}$ と表せる. この行列 Q を求めよ. 必要なら, 点の座標には点 $X(a, b, c), H(a', b', c')$ を用いること.
- (3) 行列 P の階数 $\text{rank } P$ を求めよ.

問3 xyz -空間内の, 次の操作 (線形写像) を表す行列 R_1, R_2 を記せ.

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \pi : 2x + 3y - z = 0$$

- (i) 原点 O を通る 方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直線 ℓ への正射影 : R_1
- (ii) 平面 π に関する反転 (面对称 移動) : R_2

問4 xyz -空間内の, 次の操作 (線形写像) を表す行列 R_1, R_2 を記せ.

$$\pi : x - y + z = 0, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (i) 平面 π への正射影 (垂線の足 への写像) : Q
- (ii) 原点 O を通る 方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直線 ℓ を軸とする右手 120° 回転 : R